$A \subseteq \mathbb{R}$

A SI DICE LIMITATO SUPERIORMENTE SE

$\exists L \in \mathbb{R} : a \leq L \quad \forall a \in A$

A SI DICE LIMITATO INFERIORMENTE SE

$\exists L \in \mathbb{R} : a \geq L \quad \forall a \in A$

$A \subseteq \mathbb{R} \qquad A \neq \emptyset$

SE A È LIMITATO SUPERIORMENTE, ALLORA $\ell \in \mathbb{R}$ SI DICE ESTREMO SUPERIORE DI A SE:

i. $\ell \geq a \quad \forall a \in A$
ii. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A : \ell - \varepsilon < \bar{a}$

- SE A È LIMITATO INFERIORMENTE, ALLORA $\ell \in \mathbb{R}$ SI DICE ESTREMO INFERIORE DI A SE

i. $\ell \leq a \quad \forall a \in A$
ii. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A : \ell + \varepsilon > \bar{a}$

$f: X \to Y$ SI DICE SURIETTIVA SE $Im(f) = Y$

$f: X \to Y$ SI DICE INIETTIVA SE

$x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

$x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

$f: X \to Y$ SI DICE BIETTIVA SE É SURIETTIVA E INIETTIVA

$f: X \to Y$ SI DICE INVERTIBILE SE ESISTE LA SUA INVERSA, UNA FUNZIONE $g: Y \to X$

i. $f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y$

ii. $g(f(x)) = x \quad \forall x \in X$

$f: D \to \mathbb{R} \qquad D \subseteq \mathbb{R}$

- f SI DICE CRESCENTE IN SENSO STRETTO SE
  $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- f SI DICE CRESCENTE IN SENSO LATO SE
  $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- f SI DICE DECRESCENTE IN SENSO STRETTO SE
  $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- f SI DICE DECRESCENTE IN SENSO LATO SE
  $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

- UN PUNTO $\bar{x} \in D$ SI DICE PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO SE
  $f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in D$
- UN PUNTO $\bar{x} \in D$ SI DICE PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO SE
  $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in D$
- UN PUNTO $\bar{x} \in D$ SI DICE PUNTO DI MASSIMO RELATIVO SE
  $\exists r > 0 : f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in D \cap (\bar{x} - r; \bar{x} + r)$
- UN PUNTO $\bar{x} \in D$ SI DICE PUNTO DI MINIMO RELATIVO SE
  $\exists r > 0 : f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in D \cap (\bar{x} - r; \bar{x} + r)$

SIA a_n UNA SUCCESSIONE, $\bar{a} \in \mathbb{R}$ a_n CONVERGE AD $\bar{a}$ SE

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |a_n - \bar{a}| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

SI SCRIVE $\lim_{n \to +\infty} a_n = \bar{a}$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ SIGNIFICA:

$$\forall M > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n > M \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ SIGNIFICA:

$$\forall M > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n < -M \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$$

- SE $\lim_{k \to +\infty} S_k$ ESISTE IN $\mathbb{R}$ ALLORA LA SERIE $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ È CONVERGENTE
- SE $\lim_{k \to +\infty} S_k$ NON ESISTE, ALLORA LA SERIE $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ È INDETERMINATA
- SE $\lim_{k \to +\infty} S_k$ È $+\infty$ O $-\infty$, ALLORA LA SERIE DIVERGE A $+\infty$ O $-\infty$

$\sum_{i=0}^{+\infty} q^i$ SERIE GEOMETRICA

SE $q \geq 1 \Rightarrow$ DIVERGE A $+\infty$ $\left(\lim_{k \to +\infty} S_k = +\infty \right)$

SE $|q| < 1 \Rightarrow$ CONVERGE $\left(\lim_{k \to +\infty} S_k = \frac{1}{1-q} \right)$

SE $q \leq -1 \Rightarrow$ INDETERMINATA $\left(\lim_{k \to +\infty} \text{ NON ESISTE} \right)$

SERIE ARMONICA

$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i}$ DIVERGE A $+\infty$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^p}$ CONVERGE $p > 1$

DIVERGE A $+\infty$ $p \leq 1$

SIA $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ UNA SERIE CONVERGENTE, ALLORA $\lim_{m\to+\infty} a_m = 0$

SE $\lim_{m\to+\infty} a_m \neq 0$, ALLORA NON È CONVERGENTE $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$

SIA $\sum a_m$ UNA SERIE A TERMINI POSITIVI, ALLORA $\sum a_m$ È O CONVERGENTE O DIVERGENTE A $+\infty$

- CRITERIO DEL CONFRONTO

SIANO $\sum a_m$ E $\sum b_m$ DUE SERIE A TERMINI POSITIVI TALI CHE

$0 \leq a_m \leq b_m \quad \forall m$

SE $\sum b_m$ È CONVERGENTE, ALLORA $\sum a_m$ È CONVERGENTE

SE $\sum a_m$ È DIVERGENTE A $+\infty$, ALLORA $\sum b_m$ È DIVERGENTE A $+\infty$

- CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

SIANO $\sum a_m$ E $\sum b_m$ DUE SERIE A TERMINI POSITIVI

SUPPONIAMO $a_m \sim b_m \quad \lim_{m\to+\infty} \frac{a_m}{b_m} = 1$

ALLORA LE DUE SERIE HANNO LO STESSO CARATTERE

- CRITERIO DELLA RADICE

SIA $\sum a_m$ UNA SERIE A TERMINI POSITIVI E SIA $\lim_{m\to+\infty} \sqrt[m]{a_m} = L$

SE $L<1$ ALLORA $\sum a_m$ CONVERGE

SE $L>1$ ALLORA $\sum a_m$ DIVERGE A $+\infty$

SE $L=1$ ALLORA NON POSSO DIRE NULLA

- CRITERIO DEL RAPPORTO

SIA $\sum a_n$ UNA SERIE A TERMINI POSITIVI TALE CHE $a_n > 0 \ \forall n$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

SE $L > 1$ ALLORA $\sum a_n$ DIVERGE A $+\infty$

SE $L < 1$ ALLORA $\sum a_n$ CONVERGE

SE $L = 1$ ALLORA NON POSSO DIRE NULLA

SERIE A TERMINI QUALUNQUE

UNA SERIE $\sum a_n$ SI DICE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE SE $\sum |a_n|$ È CONVERGENTE

- TEOREMA DI LEIBNIZ

SIA $\sum (-1)^n b_n$ TALE CHE

1. $b_n \geq 0 \ \forall n$
2. $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$
3. b_n SUCCESSIONE DECRESCENTE IN SENSO LATO

ALLORA $\sum (-1)^n b_n$ È CONVERGENTE

CONTINUITÀ

$f: D \to \mathbb{R} \quad D \subseteq \mathbb{R}$

SIA $\bar{x} \in D$ f SI DICE CONTINUA IN $\bar{x}$ SE

$\forall a_n$ ($a_n \in D$ $\forall n$) TALE CHE $a_n \to \bar{x}$ VALE CHE $f(a_n) \to f(\bar{x})$

$f: D \to \mathbb{R}$ SI DICE CONTINUA SE f È CONTINUA IN TUTTI I PUNTI DEL SUO DOMINIO

SIA $f: D \to \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}$ $\bar{x} \in D$

f È CONTINUA IN $\bar{x}$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \ \forall x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap D$

- f SI DICE CONTINUA DA DESTRA IN $\bar{x}$ SE

$\forall a_n$ ($a_n \in D$ $\forall n$), $a_n \to \bar{x}$, $a_n > \bar{x}$ $\forall n$, SI HA CHE $f(a_n) \to f(\bar{x})$

f SI DICE CONTINUA DA SINISTRA IN $\bar{x}$ SE

$\forall a_n$ ($a_n \in D$ $\forall n$), $a_n \to \bar{x}$, $a_n < \bar{x}$ $\forall n$, SI HA CHE $f(a_n) \to f(\bar{x})$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA, ALLORA f AMMETTE MASSIMO E MINIMO

SIGNIFICA CHE $\exists\, x_m, x_M \in [a,b]$:

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a,b]$$

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

SUPPONIAMO CHE o $f(a) < 0 < f(b)$ o $f(b) < 0 < f(a)$

ALLORA $\exists$ UN ELEMENTO $c \in (a,b)$ TALE CHE $f(c) = 0$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA, SIANO m, M RISPETTIVAMENTE IL MINIMO E IL MASSIMO DI f $(M \geq m)$

$\forall q \in [m, M]$ $\exists\, c \in [a,b]$: $f(c) = q$

UN PUNTO $\bar{x} \in \mathbb{R}$ SI DICE PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER D SE

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \neq \bar{x} \quad x \in D \cap (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$$

$f: A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R} \quad \bar{x}$ PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A

$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l$ SIGNIFICA

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \ x \neq \bar{x}$$

SE $\bar{y} \in \mathbb{R}$ ALLORA UN INTERVALLO DEL TIPO $(\bar{y} - \eta, \bar{y} + \eta)$ CON $\eta > 0$ SI DICE UN INTORNO DI $\bar{y}$

$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l \iff \forall$ INTORNO DI U DI l $\exists$ INTORNO V DI $\bar{x}$:

$$f(x) \in U \quad \forall x \in A \cap V, \ x \neq \bar{x}$$

f SI DICE DERIVABILE IN $\bar{x}$ SE

$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h}$ ESISTE ED È FINITO

FERMAT TEOREMA

SIA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E SIA $\bar{x} \in \mathbb{R}$ PUNTO DI MASSIMO O MINIMO RELATIVO PER f

SE f È DERIVABILE IN $\bar{x}$ ALLORA $f'(\bar{x}) = 0$

DIMOSTRAZIONE

$\bar{x}$ PUNTO DI MASSIMO RELATIVO PER f

$$\exists \delta > 0 : \quad f(x) \leq f(\bar{x}) \quad \forall x \in (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)$$

$$f'(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x \to \bar{x}^+} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{\bar{x} - x} \leq 0$$

$$f'(x) = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x \to \bar{x}^-} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \geq 0$$

$$0 \leq f'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

LAGRANGE TEOREMA

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA E DERIVABILE IN (a,b)

ALLORA $\exists c \in (a,b)$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

SVILUPPO DI TAYLOR

POLINOMIO DI MACLAURIN DI GRADO N CENTRATO IN $\bar{x}=0$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{N} f^{(i)}(0)\frac{x^i}{i!}+o(x^N)$$

PRIMITIVE

SIA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

UNA PRIMITIVA DI f È UNA FUNZIONE $\Phi:(a,b)\to\mathbb{R}$ DERIVABILE :

$$\Phi'(x)=f(x) \quad \forall x\in(a,b)$$

L'INSIEME DI TUTTE LE PRIMITIVE DI $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ È INDICATO CON L'INTEGRALE INDEFINITO

$$\int f(x)\,dx=\{\Phi:(a,b)\to\mathbb{R} \text{ PRIMITIVE DI } f\}$$

$$=\{\Phi(x)+c \text{ DOVE } \Phi \text{ È UNA PRIMITIVA E } c\in\mathbb{R}\}$$

TEOREMA: SIA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ SIANO $\Phi_1,\Phi_2:(a,b)\to\mathbb{R}$ PRIMITIVE DI f

ALLORA $\exists c\in\mathbb{R}: \Phi_1=\Phi_2+c \quad \forall x\in(a,b)$

LE SOMME DI RIEMANN CONVERGONO AD UN VALORE $S \in \mathbb{R}$ SE

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \theta$ CON AMPIEZZA $< \delta$ OGNI SOMMA DI RIEMANN COSTRUITA CON LA PARTIZIONE θ VERIFICA

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(\gamma_i)(x_i - x_{i-1}) - S \right| < \varepsilon$$

IN TAL CASO SI SCRIVE

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \quad \in \mathbb{R}$$ INTEGRALE DEFINITO

(SOMMA DI RIEMANN $= \sum_{i=1}^{N} f(\gamma_i)(x_i - x_{i-1})$ APPROSSIMAZIONE DEL RISULTATO CHE VOGLIAMO)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA, ALLORA LE SOMME DI RIEMANN CONVERGONO

(L'INTEGRALE DEFINITO ESISTE PER FUNZIONI CONTINUE
PUÒ ESISTERE ANCHE PER FUNZIONI DISCONTINUE
SE IL NUMERO DI PUNTI DI DISCONTINUITÀ È FINITO, ALLORA ESISTE)

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO 1

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

SIA $\Phi: [a,b] \to \mathbb{R}$ UNA PRIMITIVA DI f

ALLORA $$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO 2

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

ALLORA LA FUNZIONE INTEGRALE $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ È UNA PRIMITIVA DI f:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$