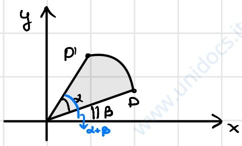
LEZIONE 8

ESEMPIO: «ROTAZIONI nel piano»



Consideriamo la trasformazione del generico punto P che lo ruota e lo porta in P' (quello che fa ad un punto lo fa a tutti)

possiamo scrivere le coordinate di P come COORDINATE POLARI del piano

$P=(x;y)=(\rho\cos\beta;\rho\,\mathrm{sen}\beta)$, per P' cambierà l'angolo ma ρ sarà la stessa

$P'=(x';y')=(\rho\cos(\alpha+\beta);\rho\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta))$

possiamo riscrivere le coordinate utilizzando le formule di addizione:

$\rho\cos(\alpha+\beta)=\rho\cos\alpha\cos\beta-\rho\,\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta$

$\rho\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)=\rho\,\mathrm{sen}\alpha\cos\beta-\rho\cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta$

Ma noi sappiamo che $x=\rho\cos\beta$ e $y=\rho\,\mathrm{sen}\beta$, ora li sostituisco nelle eq. precedentemente trovate

$x'=\rho\cos(\alpha+\beta)=x\cos\alpha-y\,\mathrm{sen}\alpha$

$y'=\rho\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)=x\,\mathrm{sen}\alpha+y\cos\alpha$

posso scrivere x' e y' nel seguente modo

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha\\ \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

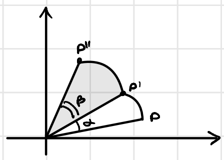
→ la rotazione è descritta da questa matrice

ROTAZIONE = trasformazione del piano in se stesso che ruota i punti di un angolo α è descritta da una matrice che dipende dall'angolo α.

$R(\alpha)$ = matrice di rotazione di un angolo α = $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha\\ \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

Supponiamo di eseguire due successive rotazioni

$$P=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{prima rotazione}]{R(\alpha)}R(\alpha)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{seconda rotazione}]{R(\beta)}\underbrace{R(\beta)R(\alpha)}_{\text{rotazione finale}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\cos\beta & -\mathrm{sen}\beta\\ \mathrm{sen}\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\mathrm{sen}\alpha\\ \mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=R(\alpha+\beta)$$



$$R(\alpha+\beta)=\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\alpha-\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\alpha & -\cos\beta\,\mathrm{sen}\alpha-\mathrm{sen}\beta\cos\alpha\\ \mathrm{sen}\beta\cos\alpha+\cos\beta\,\mathrm{sen}\alpha & -\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\mathrm{sen}(\alpha+\beta)\\ \mathrm{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

Le matrici rappresentano TRASFORMAZIONI LINEARI nel piano

- prendiamo due vettori $\underline{v},\underline{w}\in\mathbb{R}^n$ e una matrice A di tipo $(m;n)$ e posso fare $\boxed{A(\underline{v}+\underline{w})=A\underline{v}+A\underline{w}}$

  posso farlo poiché un vettore in $\mathbb{R}^n$ è una colonna di n righe, quindi gli posso applicare una matrice di tipo $(m;n)$

- analogamente se prendo $\alpha\in\mathbb{R}$ e un vettore $\alpha\underline{v}\in\mathbb{R}^n$ otterrò una matrice $\boxed{A(\alpha\underline{v})=\alpha A\underline{v}}$

⟹ Queste sono le proprietà che descrivono un'APPLICAZIONE LINEARE

! A è un'applicazione o mappa lineare che prende gli elementi di $\mathbb{R}^n$ e li porta in $\mathbb{R}^m$, $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

Se la matrice di tipo $(m;n)$ lavora su vettori di $\mathbb{R}^n$ dà come risultato vettori di $\mathbb{R}^m$

La composizione di 2 applicazioni lineari è anch'essa un'applicazione lineare ed è rappresentata dalla matrice prodotto

Prendiamo $A_2, A_1, \underline{x}$, con fare la composizione intendo che prima prendo A_1 e $\underline{x}$ e ne faccio il prodotto e al vettore prodotto applico la matrice A_2.

Oppure prima avrei potuto fare il prodotto delle matrici A_1, A_2 e alla matrice prodotto avrei applicato il vettore $\underline{x}$. Questi due procedimenti sono equivalenti.

• DETERMINANTE della MATRICE:

È la caratteristica di una matrice quadrata che ha la sua applicazione nel capire se la matrice è un'applicazione lineare e se essa sia invertibile.

Utilizzeremo un PROCESSO RICORSIVO (prima una matrice 1x1, poi 2x2, poi studiamo come si passa dalla matrice successiva alla precedente)

Consideriamo le matrici di ordine $(m \times m)$

▶ $\boxed{m=1}$ $M=(a)$, $\det M = a$

▶ $\boxed{m=2}$ $M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\det M = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ → moltiplico gli elementi della diagonale principale a cui sottraggo il prodotto degli elementi sull'altra diagonale

ex: $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 1 = 8+3 = 11$

Supponiamo di avere $A=(m,m)$,

j-esima colonna

i-esima riga

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$

il MINORE COMPLEMENTARE di a_{ij}, indicato con M_{ij} è il determinante della matrice ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

COMPLEMENTO ALGEBRICO di a_{ij} è $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

il segno dipende dal posto della matrice, il posto dipende dalla somma di i e j

Ex: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ per trovare M_{12} cancello la prima riga e la seconda colonna

$M_{12} = \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot 0 - (-3) \cdot 2 = 0 + 6 = +6$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot 6 = -6$

$M_{33} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 2 = +2$ e $A_{33} = (-1)^6 \cdot 2 = +2$

Si chiama determinante di A la somma dei prodotti degli elementi di una qualunque riga (o colonna) per i loro complementi algebrici.

Ex: elementi della k-esima riga → $\det A = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{km}A_{km}$

qui è comodo che sia ricorsiva perché per applicare questa def. devo saper calcolare il det di altre matrici di ordine 2x2

esempio: calcolare il det della matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Suggerimento: scegliere una riga o colonna con almeno uno 0 presente (così si semplificano i calcoli)

$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 3 \cdot A_{13}$ (prima riga) (oppure avrei potuto fare $3 \cdot A_{13} + 2 \cdot A_{23} + 0A_{33}$, terza colonna)

$= 0 + 2\,(-1)^3 \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 + (-2 \cdot -2) + (3 \cdot 5) = 0 + 4 + 15 = 19$

Al posto che scrivere det( ) posso scrivere solo la matrice tra due sbarre verticali | |

• det di una matrice di ordine 4: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 3 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34}$

$= 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 3(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 = 2 \cdot \underbrace{(2(-1)^2 \cdot 7 + 3(-1)^3 \cdot 3 + 4(-1)^4 \cdot 1)}_{\text{det matrice } 3\times 3} + 3 \cdot 1 \cdot 3 =$

$= 2(14-9+4)+9 = 27$

▶ SITUAZIONI PARTICOLARI:

• MATRICE DIAGONALE: $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$

la matrice diagonale ha come det. il prodotto dei termini sulla diagonale principale

• MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE: matrice che ha tutti i termini sotto la diagonale principale $=0$

(la matrice triangolare inferiore ha i termini sopra la diagonale principale $=0$)

$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} = a \cdot d \cdot f$ → anche in questo caso sono elementi della diagonale principale

• TEOREMA (proprietà del determinante):

consideriamo una matrice A di tipo (m,m)

a) se la matrice ha una riga o una colonna di elementi nulli, il $\boxed{\det(A)=0}$

b) se scambio tra loro due righe o due colonne il $\det(A)$ cambia segno

ex: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ se faccio 2 scambi ripristino il segno (se faccio un numero dispari di scambi il det cambia segno)

c) se A ha due righe o due colonne uguali il $\det(A)=0$

ex: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

d) il det è una funzione lineare delle righe o delle colonne

$\det \begin{pmatrix} \underline{a_1+b_1} \\ \underline{a_2} \\ \vdots \\ \underline{a_m} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \underline{a_1} \\ \underline{a_2} \\ \vdots \\ \underline{a_m} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \underline{b_1} \\ \underline{a_2} \\ \vdots \\ \underline{a_m} \end{pmatrix}$ → sto sommando solo la prima riga, il resto rimane invariato

det della somma di 2 matrici

se moltiplico $\underline{a_1} \cdot \lambda$ otterrò $\det \begin{pmatrix} \lambda \underline{a_1} \\ \underline{a_2} \\ \vdots \\ \underline{a_m} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \underline{a_1} \\ \underline{a_2} \\ \vdots \\ \underline{a_m} \end{pmatrix}$

e) se una riga si aggiunge a una qualunque combinazione lineare di altre righe il determinante non cambia.

f) se le righe (o colonne) di A sono linearmente dipendenti, $\det(A)=0$ (implicazione della c)

g) il $\det(\lambda A) = \lambda^m \det(A)$ (conseguenza della d)

h) se A è triangolare (in particolare diagonale), $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{mm}$ → è il prodotto dei termini della diagonale principale

LEZIONE 9

EX 1: $\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ = se prendo la II riga e la moltiplico per 2, in seguito la sottraggo alla I ottengo una riga con due 0. (è una delle proprietà che abbiamo visto)

$\xrightarrow{I \to I - 2II} = \det\begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$! la matrice cambia ma il det rimane invariato

$= (-5)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = +5(-2-4) = -30$

EX 2: $\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{2(I\,col) - II\,col} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det = 0$ poiché la I e la III colonna sono linearmente dipendenti

! n vettori in $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ la matrice che ha per colonne gli n vettori ha determinante non nullo.

• **TEOREMA di BINET**: supponiamo di avere A, B matrici quadrate dello stesso ordine, il det della matrice prodotto è uguale al prodotto dei due det. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

nel caso in cui $\boxed{A = B}$ avremo $\det(A^2) = (\det A)^2$

Vediamo qualche altro esempio di uso del det.:

prendiamo due vettori $\underline{v} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\underline{w} = (y_1, y_2, y_3)$, abbiamo che $\underline{v} \wedge \underline{w} = (x_2y_3 - x_3y_2)\underline{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\underline{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\underline{k}$

$x_2y_3 - x_3y_2 = \det\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$, $x_3y_1 - x_1y_3 = \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$, $x_1y_2 - x_2y_1 = \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

quindi possiamo scriverlo come un det unico $\det\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$.

Ex: << Verificare il PRODOTTO MISTO >>

$\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ con $\underline{u} = (z_1; z_2; z_3)$

avendo già calcolato in precedenza $\underline{v} \wedge \underline{w}$ basta solo fare il prodotto tra il risultato e $\underline{u}$

$[(x_2y_3 - x_3y_2)\underline{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\underline{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\underline{k}] \cdot (z_1\underline{i} + z_2\underline{j} + z_3\underline{k}) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$

moltiplicherò nel seguente modo, è il det della matrice

Ex: << Calcolare il $\det A^5$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ >>

$\det(A^5) = \det(A \cdot A^4) \underset{\text{per Teo Binet}}{=} \det A \cdot \det(A^4) \underset{\text{per Teo Binet}}{=} \det A \cdot \det A \cdot \det(A^3) = (\det A)^5$

più in generale $(A^n) = (\det A)^n \Rightarrow$ nel nostro esempio $\det A = 6$ quindi $\det(A^5) = 6^5$

! Quando faccio la potenza non cambia il tipo di matrice $\Rightarrow A^5$ è una matrice di tipo 2x2

• **CARATTERISTICA di una MATRICE**: (non è necessario che la matrice sia quadrata)

- TEO: consideriamo r vettori riga in $\mathbb{R}^n$ $(r < n)$ $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ e consideriamo la matrice che si ottiene "sovrapponendo" i vettori "a"

$A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_r \end{pmatrix}$ matrice del tipo $(r; n)$

Bisogna stabilire se i vettori sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ ogni matrice quadrata di tipo $(r;r)$ estratta da A ha det. nullo

I vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ sono linearmente indipendenti se $\exists$ almeno una matrice quadrata di ordine $(r;r)$ con $\det \neq 0$.

Ex: $\underline{a}_1 = (2 \;\; 1 \;\; 3)$
$\underline{a}_2 = (-1 \;\; 2 \;\; 0)$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ sono linearmente dipendenti se tutte le matrici 2x2 che si possono ottenere hanno $\det = 0$.

per ottenere le matrici 2x2 basta cancellare, volta in volta, una colonna

basta che una sola di queste matrici abbia $\det \neq 0$ e i vettori sono linearmente indipendenti

$\underline{a}_1 = (1 \;\; 2 \;\; 0 \;\; -1)$
$\underline{a}_2 = (-1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)$
$\underline{a}_3 = (1 \;\; 4 \;\; 2 \;\; -1)$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ mi basta avere una matrice estratta 3x3 con $\det \neq 0$ affinché i vettori siano lin. indip.

def: 1) Supponiamo di avere una matrice A di tipo $(m;n)$ e supponiamo di avere $\boxed{K \leq \min(m;n)}$ si dice MINORE QUADRATO DI ORDINE K estratto dalla matrice A il det di una qualsiasi matrice di ordine K ottenuta con gli elementi comuni a K righe e K colonne di A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ → min di ordine 3

È il min di ordine 2
È il det di questa matrice

2) CARATTERISTICA di una matrice A (o RANGO di A)

è un intero $r \geq 0$ t.c. : – $\exists$ un minore di ordine r estratto da A e non nullo

– tutti i minori di ordine $r+1$ sono nulli

dal teorema: la CARATTERISTICA $(rk(A))$ è dunque il max n° di righe o colonne di una matrice linearmente indipendenti.

EX: « determinare la caratteristica di A »

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ la caratteristica, in questo caso, potrà essere max 2. (sarà 0, 1 o 2)

– 0 non può essere perché ho almeno un elemento $\neq 0$

– 1 sarà almeno uno poiché per avere 1 una matrice deve avere almeno un elemento $\neq 0$

– 2 devo avere 2 colonne linearmente indipendenti
↓
cancello la terza riga e trovo $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, quindi le colonne sono linearm. indip.

$\Rightarrow$ di conseguenza $rk(A) = 2$ → le righe non sono linearmente indipendenti poiché 3 vettori in $\mathbb{R}^2$ non saranno mai lin. indip.

i primi due sono lin indip. tra di loro, il 3 sarà comb. lineare dei primi due.
↓
per questo abbiamo considerato come n° max 2 e non 3

EX 2: « determinare la caratteristica di A » (matrice quadrata)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sicuramente $rk(A) \geq 2$ poiché ho un min di ordine $2 \neq 0$, al max $rk(A)$ sarà 3

per scoprirlo calcolo il det
↓
cancello la 3 colonna $\det(A) = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 5 \neq 0$ $\Rightarrow rk(A) = 3$

Se il det della matrice è $\neq 0$ allora $rk(A)$ sarà max

EX 3: « determinare la caratteristica di A »

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

il $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ e il $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ quindi $rk(A) \geq$ almeno 2

poiché ho trovato un min di ordine 2 $\neq 0$ e le prime due righe sono lin. indip.

$rk(A) \neq 2$ poiché ho una colonna di 0 e il $\det(A) = 0$

- TEOREMA KRONECKER: (dei minori orlati) la condizione necessaria e suff. poiché una matrice abbia $rk = k$ è che ∃ un minore di ordine $k \neq 0$ e siano nulli tutti i minori di ordine $k+1$ ottenuti da quello $\neq 0$ ORLANDOLO con qualsiasi altra riga o colonna

ORLANDOLO: prendere il min $\neq 0$ gli si accosta una riga o una colonna e si ottiene un min di ordine $k+1$ che deve essere $= 0$

EX 1: $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 6 & 8 \end{matrix} \end{pmatrix}$

$rk(A)$ sarà ≤ 3 ($rk(A)$ sarà $0, 1, 2, 3$)

$rk(A) \neq 0$ poiché la matrice non è identicamente nulla

$rk(A) \neq 1$ poiché ho almeno un elemento $\neq 0$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$ quindi il $rk(A)$ è almeno 2

Ora guardo tutti i minori di ordine 3, con il Teo di Kronecker guardiamo i min di ordine 3 ottenuti ORLANDO A

Considero $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e la orlo con la 3 riga e la 3 colonna

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -2(12-12) + 3(4-4) = 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2(16-16) + 5(4-4) = 0.$$

orlo con la 3 riga e la 4 colonna

li ho calcolati tenendo fissa la matrice di cui avevo calcolato il det all'inizio

$\Rightarrow rk(A) = 2$