LEZIONE 7: 21/03/2022

MATRICI

matrici

indichiamo la matrice $A=(a_{ij})$ e la matrice $B=(b_{ij})$

↳ • "i" è l'indice di riga (primo indice)

• "j" è l'indice di colonna (secondo indice)

$A(m;n)$ è una matrice di m righe ed n colonne

• esempi speciali: 1) $m=1$, $n=k$ $(x_1, \dots, x_k)$

2) $m=k$, $n=1$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ } $\in \mathbb{R}^k$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

se fisso $j=3$ sto fissando la 3 colonna e sto scorrendo lungo le righe.

mentre se fisso $i=2$, sto fissando la riga e scorro lungo le colonne

$\boxed{A=B \iff a_{ij}=b_{ij}}$ $\forall i=1 \dots m$ e $\forall j=1 \dots n$

▶ OPERAZIONI:

• **SOMMA $A+B$** : due matrici si possono sommare se e solo se sono dello stesso tipo $(m;n)$ (se e solo se sono della stessa dimensione)

(c_{ij})

$\boxed{c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}}$ con $i=1 \dots m$ e $j=1,\dots,n$

EX: $\underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} + \underset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{C}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}$

• **PRODOTTO TRA MATRICE E SCALARE:** considero una matrice $A=(a_{ij})$ e uno scalare $t \in \mathbb{R}$, $\boxed{tA=t(a_{ij})}$

moltiplico gli elementi della matrice per lo scalare

EX: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $t=2$ $\Rightarrow t\cdot A=\begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 1\cdot 2 \\ -1\cdot 2 & 3\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

Dato che valgono queste operazioni possiamo definire le matrici come SPAZIO VETTORIALE

le matrici $(m;n)$ hanno come DIMENSIONE il numero di elementi di una base

• matrici di tipo (2×2) possono essere $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Se prendo le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con queste posso scrivere qualsiasi tipo di matrice come COMBINAZIONE LINEARE (poiché sono linearmente indipendenti)

$A=a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\forall A \in M(2\times 2)$

▷ L'insieme delle matrici 2×2 ha dimensione 4 nello spazio vettoriale

▷ L'insieme delle matrici 3×2 avrà dimensione 6

$\Rightarrow$ In generale l'insieme delle matrici $(m;n)$ avrà come dimensione dello spazio vettoriale il prodotto $m\cdot n$

↓ $Mat(m,n,\mathbb{R})$ o $M(m,n)$

• **PRODOTTO di MATRICI:**

supponiamo di avere $A=(a_{ik}) \in M(m;n)$ e $B=(b_{ik}) \in N(n,p)$, si può definire per Hp il prodotto delle matrici $A\cdot B=C$ dove $C=(c_{ij}) \in M(m,p)$

n° di righe di A e n° di colonne di B

$\Rightarrow \boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & & \\ \vdots & & \\ c_{m1} & & \end{pmatrix}$$

$c_{11}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1}$ → prendo la prima riga di A e faccio il prodotto scalare con la prima colonna di B

$c_{21}=\sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1}$ → seconda riga di A per la prima colonna di B

$c_{m1}=\sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1}$ → m-esima riga di A per la prima colonna di B

$c_{1p}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp}$ → prodotto scalare della prima riga di A con la p-esima colonna di B.

Questo prodotto è chiamato PRODOTTO RIGHE per COLONNE

Ex: $A=\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow A\cdot B=\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}}$ $2(+1)+3\cdot(0)+1(-1)$

$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m\end{pmatrix}=(a^1 \dots a^n)$

$\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn}\end{pmatrix}$ = $\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right)$

VETTORI RIGA — VETTORI COLONNA

$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m\end{pmatrix}(b_1 \dots b_m)=(c_{ij})$

è un altro metodo per il prodotto righe x colonne

il prodotto scalare della i-esima riga della prima matrice con la i-esima colonna della seconda matrice

▷ PROPRIETÀ:

- se $A\in M(m,n)$ e $B\in M(n,p)$ ⇒ ha senso $A\cdot B$, ma noi possiamo svolgere $B\cdot A$?

No, poichè il n° di colonne della matrice B non coincide con il n° di righe di A. Quindi il prodotto NON è commutativo. Ora guardo il caso di matrici quadrate $(m;m)=A$ e $B=(m;m)$ sia $B\cdot A$ che $A\cdot B$ hanno senso.

Ex: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5\end{pmatrix}$ e $B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4\end{pmatrix}$

il prodotto tra matrici NON è mai commutativo $\boxed{A\cdot B\neq B\cdot A}$

quindi è sempre importante specificare l'ordine nei "coeff." nel prodotto

- il prodotto tra matrici è ASSOCIATIVO.

prendiamo 3 matrici $A=(m;n)$, $B=(n;p)$, $C=(p,q)$ sono moltiplicabili tra loro in quest'ordine

$A\cdot B$ e $B\cdot C$, ha senso fare $\underset{(m;n)(n;p)}{(A\cdot B)\cdot C}$ o $\underset{(m;n)\,(n;q)}{A\cdot(B\cdot C)}$ ⟹ $\boxed{(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)}$ è vera

sì ha senso anche questa scrittura ha senso

- Vale anche la proprietà DISTRIBUTIVA $\boxed{A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C}$

  - B e C devono essere dello stesso tipo
  - A deve essere moltiplicabile sia per B che per C

  ⇒ $A=(m;n)$ e $B=C=(n;p)$

- ELEMENTO NEUTRO $I=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$ matrice quadrata $m\times m$ $(\in M(m;m))$

(a_{ij}) $a_{ij}=1$ mentre $a_{ij}=0$ quando $i\neq j$

prendiamo la matrice $B=(b_{ij})\in M(m;m)$, $B\cdot I=C=c_{ij}$ con $\boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}=b_{ij}}$

in questa somma c'è un unico elemento $\neq 0$ quando $k=j$

⇒ $\boxed{B\cdot I=B}$ la matrice prodotto $B\cdot I$ è uguale alla matrice B

$I\cdot B=\sum_{k=1}^{m} a_{ij}b_{ij}=b_{ij}$ ⟶ l'unico termine sopravvive quando $i=k$

I è la MATRICE IDENTICA o IDENTITÀ ⟶ essa è l'elemento neutro del prodotto

$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m\end{pmatrix}$ è la matrice colonna di B ⟹ $B\cdot I=B=I\cdot B$ (stessa cosa scritta prima ma in maniera differente)

Supponiamo di avere una matrice $A=(a_{ij})$ del tipo $(n;m)$ voglio trovare la TRASPOSTA di A: $A^T=(b_{ij})$ di tipo $(m;n)$

la trasposta di una matrice quadrata $(m;m)$ ← si ottiene scambiando le righe con le colonne $\boxed{b_{ij}=a_{ji}}$

è ancora una matrice del tipo $(m;n)$

Ex: $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

la diagonale principale rimane invariata, si scambiano gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale

Ex: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ del tipo 2×3

$A^T=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ del tipo 3×2

• MATRICE SIMMETRICA

Una matrice si dice simmetrica se coincide con la sua trasposta, se $\boxed{A=A^T}$ (ha senso solo per la matrice quadrata)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ è una MATRICE SIMMETRICA

prendo una matrice $A=(a_{ij})$ di tipo $(n;m)$ e ho un vettore $b\in\mathbb{R}^m$ con $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ (posso vederla come matrice $(m;1)$)

e prendo un altro vettore $\underline{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\in M(m;1)$

$\boxed{A\underline{x}=b}$ → $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nm}x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}}$

↓

sistema di m- equazioni e n incognite