Dimostrazione: esercizio.

- Quindi, il punto $a \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di $A \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se (i) è il maggiorante di A e (ii) in ogni intorno sinistro di A ci sono elementi di A.
- ii) significa che $\forall \epsilon > 0, \exists x \in A : \ x \in (a - \epsilon, a]$.
- Una simile caratterizzazione vale per gli estremi inferiori sostituendo gli intorni destri con gli intorni sinistri.

Dimostrazione: Compito

Esempio:

Dato $A = (0, 1)$. Quindi $1 = \sup A$ e $\forall \epsilon > 0, \exists x \in A : x > 1 - \epsilon$.
Fissiamo $\epsilon = 0.2$ e consideriamo $x = 0.99 \in A$, allora $x > 1 - \epsilon = 0.8$.
Simile risultato per $0 = \inf A$.

$\mathbb{R}^n$

Dato $A, B \subseteq \mathbb{R} \implies$

- $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$;
- $A \times A = \{(x, y) : x \in A, y \in A\}$;
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$;

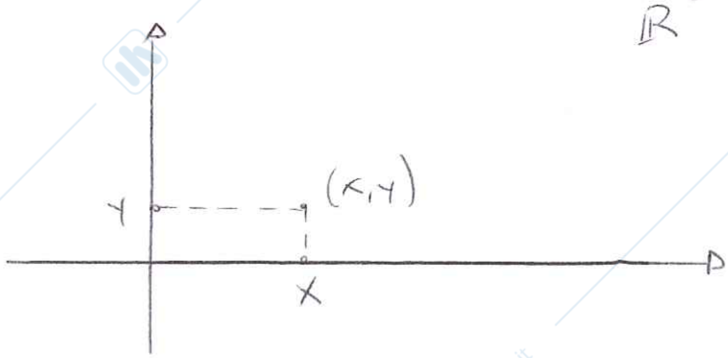
Dove (x, y) sono coppie ordinate:

$$(x, y) \neq (y, x)$$

Definizione. *47 Dati due insiemi A_1 e A_2, il* ***prodotto cartesiano*** *$A_1 \times A_2$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate (a_1, a_2) con $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$.*

Interpretazione geometrica: **piano** (grafico)

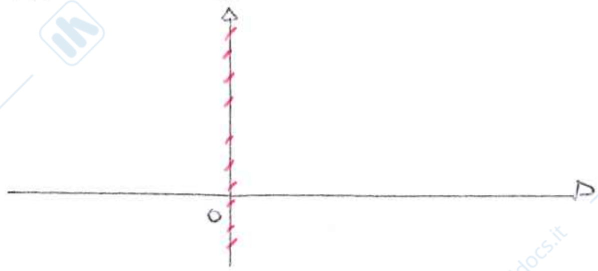
$\mathbb{R}^2$



Una coppia ordinata $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è un vettore. Possiamo anche scrivere $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

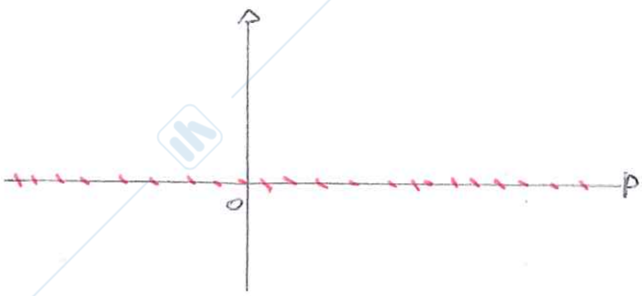
Sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

- $A \subseteq \mathbb{R}^2 : A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, asse verticale:



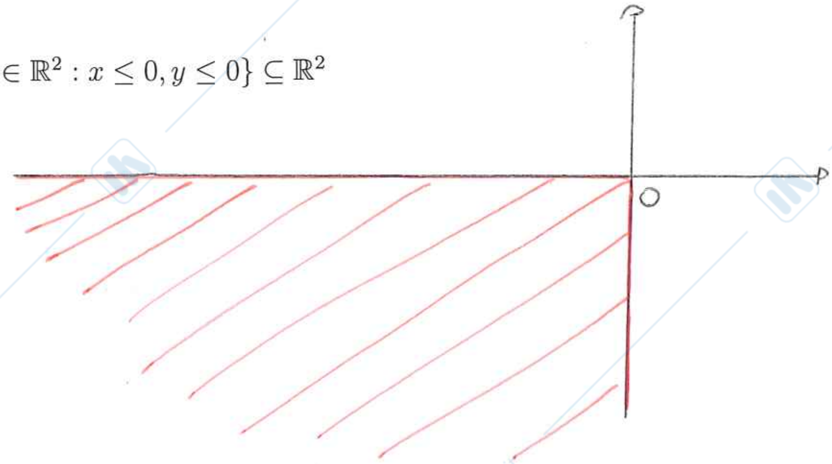
Questo può essere scritta come $A = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, asse orizzontale

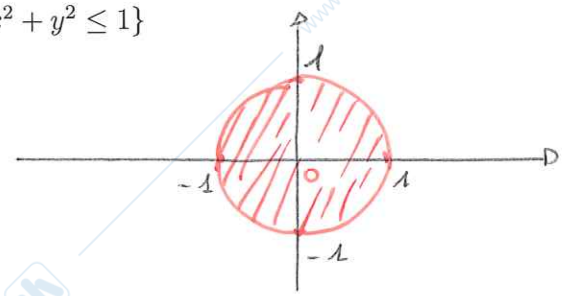


Questo può essere scritta come $B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

- $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

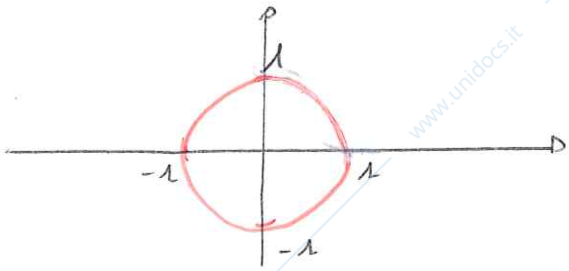


- $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

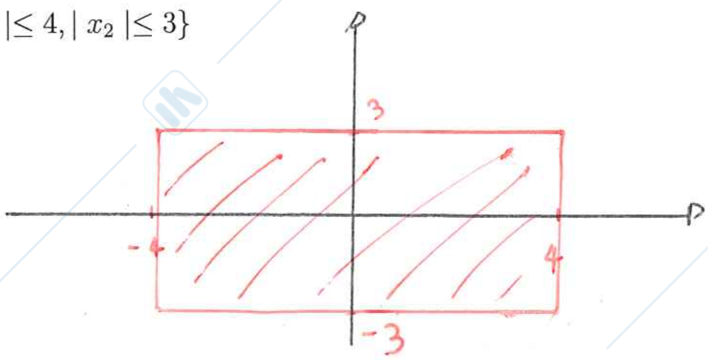


La "sfera chiusa", centrata all'origine di raggio 1.

- $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ il cerchio unitario.

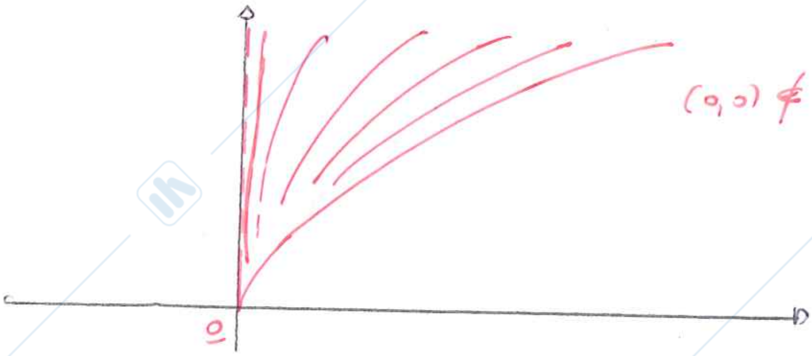


- $F = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : | x_1 | \leq 4, | x_2 | \leq 3\}$

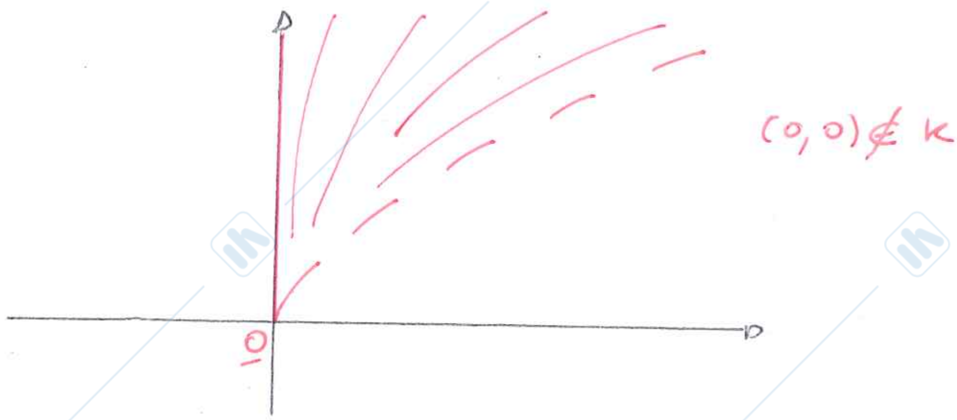


- $G = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq \sqrt{x_1}\}$

- $H = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \geq \sqrt{x_1}\}$



- $K = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 > \sqrt{x_1}\}$



n=3

Dato A, B, C $\subseteq \mathbb{R} \implies$

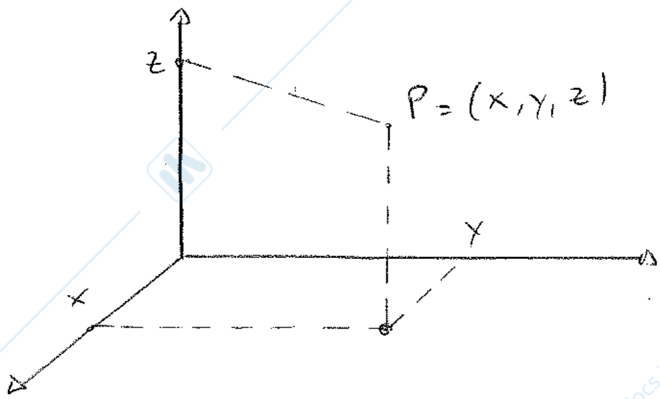
$$A \times B \times C = \{(x, y, z) : \; x \in A, \, y \in B, \, z \in C\}$$

Quando $A = B = C = \mathbb{R}$ allora

$$\Rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3,$$

e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una **tripletta ordinata** (vettore).

Interpretazione geometrica: **Spazio.**



Definizione. *48 Dati n insiemi, A_1, A_2, $\cdots$, A_n il loro prodotto Cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots A_n$ definito da $\prod_{i=1}^{n} A_i$ (o da $\times_{i=1}^{n} A_i$) è l'insieme di tutte le n-uple ordinate (a_1, a_2, $\cdots$, a_n) con $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $\cdots$, $a_n \in A_n$.*

Quando $A_1 = A_2 = \cdots = \mathbb{R}$ abbiamo $\mathbb{R}^n$, e le n-uple sono composte da numeri reali.

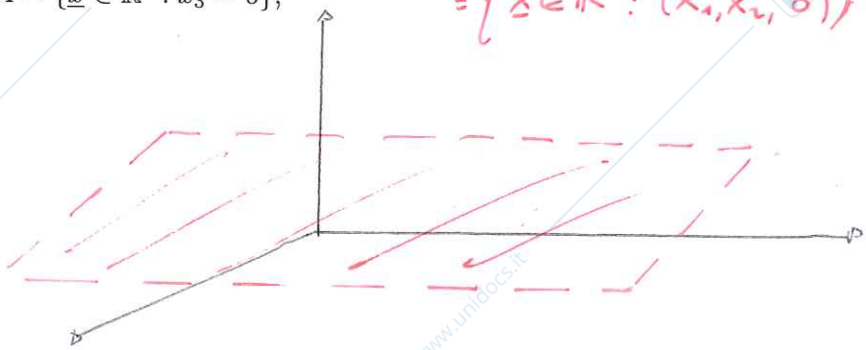
$\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ è definito **vettore.**

Per $n > 3$ non abbiamo una interpretazione geometrica.

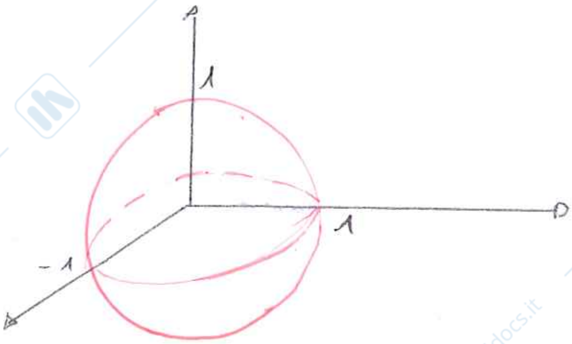
Nota: Definiamo con $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ un vettore di $\mathbb{R}^n$ e con x_i le sue componenti.

Sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$

- $A \subseteq \mathbb{R}^3 : A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$; $= \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, 0), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$



- $A \subseteq \mathbb{R}^3 : A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ (sfera vuota):



Operazioni in $\mathbb{R}^3$

1. **Somma:** dato $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$

   Esempio: $\underline{x} = (3, -2, 0) \in \mathbb{R}^3$, $\underline{y} = (-\sqrt{2}, 0, \pi) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$
   $\underline{x} + \underline{y} = (3 - \sqrt{2}, -2 + 0, 0 + \pi) = (3 - \sqrt{2}, -2, \pi) \in \mathbb{R}^n$

2. **Prodotto tra un vettore e uno scalare**: dato $\alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \alpha \underline{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$

   Esempio: $\alpha = -3$, $\underline{x} = (-2, 3, 5) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$
   $\alpha \underline{x} = (6, -9, -15)$

- $\underline{0} = (0, 0, \cdots, 0)$ rappresenta **l'origine**.

Proposizione. *49. Siano $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z} \in \mathbb{R}^n$. L'operazione di addizione soddisfa le seguenti proprietà:*

i) $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$ *(commutativa);*

ii) $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$ *(associativa);*

iii) $\underline{x} + \underline{0} = \underline{x}$ *(esistenza dell'elemento neutro per l'addizione)*

iv) $\underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{0}$ *(esistenza dell'opposto di ogni vettore)*

Proposizione. *50. Siano $\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. L'operazione del prodotto tra un vettore e uno scalare soddisfa le seguenti operazioni:*

i) $\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha\underline{x} + \alpha\underline{y}$ *(distributività della somma di vettori)*

ii) $(\alpha + \beta)\underline{x} = \alpha\underline{x} + \alpha\underline{x}$ *(distributività della somma di scalari)*

iii) $1\underline{x} = \underline{x}$ *(esistenza dell'elemento neutro)*

iv) $\alpha(\beta\underline{x}) = (\alpha\beta)\underline{x}$ *(associativa)*

$\mathbb{R}^n$ con tutte le proprietà della somma e del prodotto tra un vettore e uno scalare è detto **spazio vettoriale** (o **spazio lineare**).

L'ultima operazione in $\mathbb{R}^n$: il **prodotto scalare**.

Dato $\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, il **prodotto scalare** definito da $\underline{x} \cdot \underline{y}$ è lo **scalare** definito da

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Esempio: $\underline{x} = (3, 2, 1)$ $\underline{y} = (-2, 3, 1) \Rightarrow \underline{x} \cdot \underline{y} = 3(-2) + 2(3) + 1 = 1$

Proposizione. *51. Siano $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Abbiamo:*

i) $\underline{x} \cdot \underline{y} = \underline{y} \cdot \underline{x}$ *(commutativa)*

ii) $(\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{z} = \underline{x} \cdot \underline{z} + \underline{y} \cdot \underline{z}$ *(distributiva)*

iii) $\alpha \underline{x} \cdot \underline{z} = \alpha(\underline{x} \cdot \underline{z})$ *(distributiva)*

Remark: ii)+iii) $\Rightarrow (\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) \cdot \underline{z} = \alpha(\underline{x} \cdot \underline{z}) + \beta(\underline{y} \cdot \underline{z})$

Struttura d'ordine in $\mathbb{R}^n$

Dato $\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, allora definiamo

$$\underline{x} \leq \underline{y} \quad \text{quando} \quad x_i \leq y_i \ \forall \, i = 1, \cdots, n.$$

Esempio:

- $\underline{x} = (2, 0, 1)$, $\underline{y} = (2, 3, e) \Longrightarrow \underline{x} \leq \underline{y}$

- $\underline{x} = (0, 1)$ $\underline{y} = (1, 0) \Longrightarrow \underline{x}$ e $\underline{y}$ **non sono confrontabili.** Quindi l'ordine di relazione $\geq$ in $\mathbb{R}^n$ **non è completa.** Definiamo $\geq$ in $\mathbb{R}^n$ un **ordine parziale**.

Significa che $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, se $\underline{x} \leq \underline{y}$ e $\underline{y} \leq \underline{x} \Longrightarrow \underline{x} = \underline{y}$.

Anche in $\mathbb{R}^n$ la relazione di ordine $\leq$ soddisfa le proprietà viste in $\mathbb{R}$: riflessività, transitività, indipendenza e separazione ma non completezza **(due vettori non sono sempre confrontabili)**.

Disuguaglianze Strette/Forti

Dato $\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$. Definiamo:

- **Disuguaglianza Stretta:** se $x_i \leq y_i$ con almeno un indice j tale che $x_j < y_j$; definiamo $\underline{x} < \underline{y}$ (diciamo $\underline{x}$ è strettamente più piccolo di $\underline{y}$).

- **Disuguaglianza Forte:** $x_i < y_i \ \forall i = 1, \cdots, n$; definiamo $\underline{x} << \underline{y}$ (diciamo $\underline{x}$ è fortemente più piccolo di $\underline{y}$);

Esempio:

- $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

  $\underline{x} << \underline{y}$, $\underline{x}$ fortemente più piccolo di $\underline{y}$.

- $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

  $\underline{x} < \underline{y}$, $\underline{x}$ strettamente più piccolo di $\underline{y}$.

- $\underline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

  $\underline{x}$ e $\underline{y}$ non sono comparabili.

Significa che

$$\underline{x} >> \underline{y} \Rightarrow \underline{x} > \underline{y} \Rightarrow \underline{x} \geq \underline{y}$$

Dato $\underline{x}$, $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$. Il vettore $\underline{x}$ è

1) positivo $\underline{x} \geq \underline{0}$ ($x_i \geq 0_i \forall i$)
2) strettamente positivo se $\underline{x} > \underline{0}$ (almeno un indice j tale che $x_j > 0_j$)
3) fortemente positivo se $\underline{x} >> \underline{0}$ ($x_j > 0_j \forall j$)

Intervalli in $\mathbb{R}^n$

Dato $\underline{a}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$:

1. $[\underline{a}, \underline{b}] = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{a} \leq \underline{x} \leq \underline{b}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$
   Intervalli limitati e chiusi;

2. $(\underline{a}, \underline{b}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{a} << \underline{x} << \underline{b}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i\}$
   intervalli limitati e aperti;

3. $(\underline{a}, \underline{b}] = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{a} << \underline{x} \leq \underline{b}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i \leq b_i\}$

   $[\underline{a}, \underline{b}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{a} \leq \underline{x} << \underline{b}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i < b_i\}$,
   intervalli limitati e semi chiusi (semi aperti)

4. $[\underline{a}, +\infty) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} \geq \underline{a}\}$

   $(\underline{a}, +\infty) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} >> \underline{a}\}$

   $(-\infty, \underline{a}] = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} \leq \underline{a}\}$

   $(-\infty, \underline{a}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} << \underline{a}\}$,

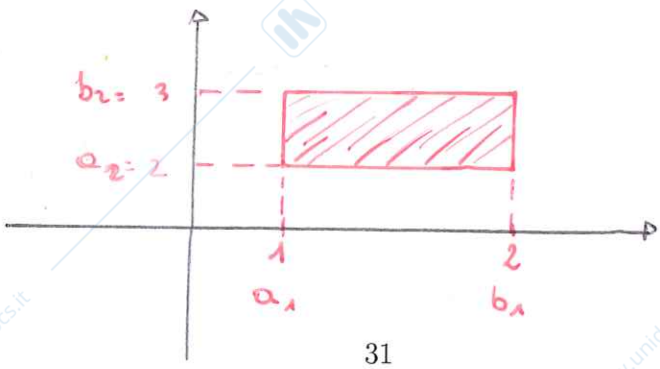
   intervalli illimitati

Esempio:

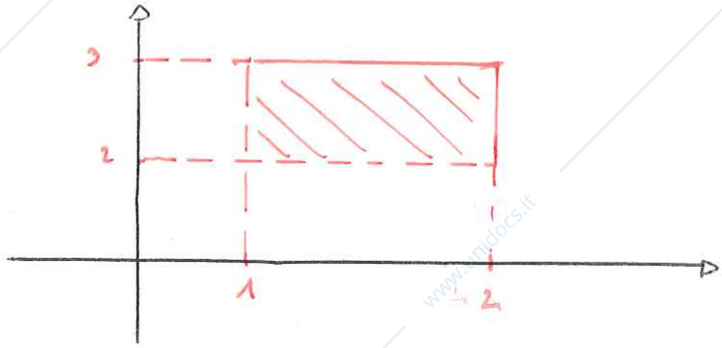
$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

quindi

- $[\underline{a}, \underline{b}] = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \underline{a} \leq \underline{x} \leq \underline{b}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 2, 2 \leq x_2 \leq 3\}$



- $$\begin{aligned}(\underline{a}, \underline{b}] &= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \underline{a} << \underline{x} \leq \underline{b}\} \\ &= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : a_i < x_i \leq b_i\} \\ &= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1 \leq 2, 2 < x_2 \leq 3\}\end{aligned}$$



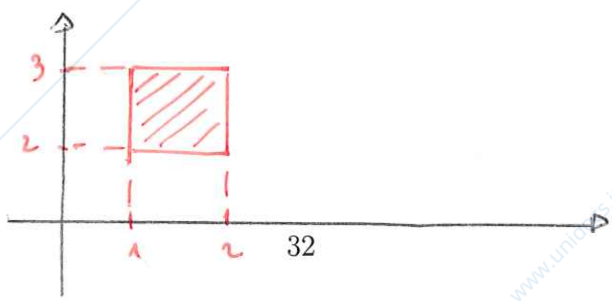
Osservazione. *Intervalli in $\mathbb{R}^n$ possono essere espressi come prodotto cartesiano di intervalli di $\mathbb{R}$.*

$$[\underline{a}, \underline{b}] = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]) = \times_{i=1}^{n}[a_i, b_i].$$

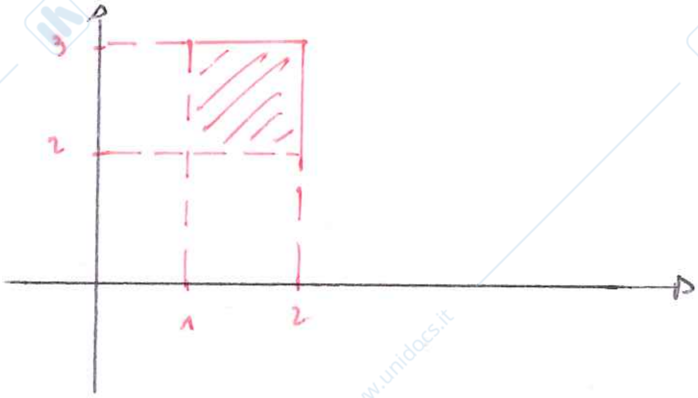
Esempio:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $[\underline{a}, \underline{b}] = \times_{i=1}^{2}[a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = [1, 2] \times [2, 3]$

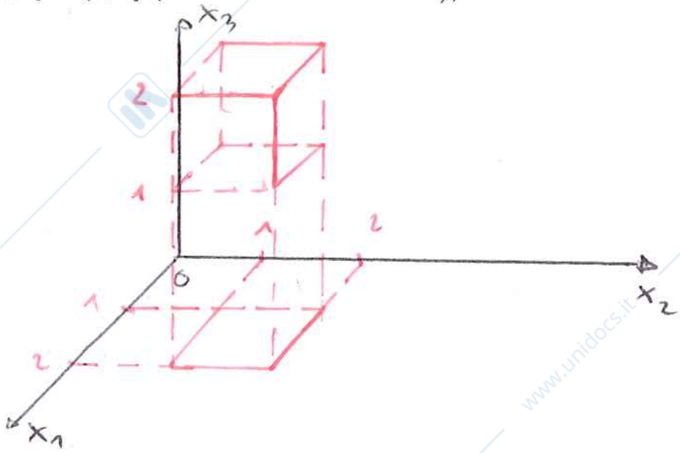


- $(\underline{a}, \underline{b}] = \times_{i=1}^{2}(a_i, b_i] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] = (1, 2] \times (2, 3]$



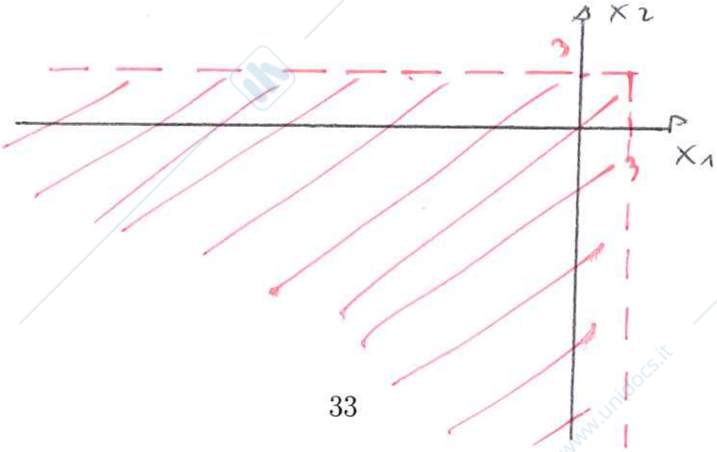
n=3

$(\underline{1}, \underline{2}] = (1, 2] \times (1, 2] \times (1, 2]$ (limitato e semi chiuso),



n=2

$(-\infty, \underline{3}) = (-\infty, 3) \times (-\infty, 3)$ (illimitato e aperto),



Insiemi Convessi

Introduciamo prima la **combinazione lineare** di vettori.

Definizione. 77. *Un vettore* $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ *è una combinazione lineare di vettori* $\{\underline{x}^1, \underline{x}^2, \cdots, \underline{x}^m\}$ *di* $\mathbb{R}^n$ *se esistono* m *scalari* $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ *tali che*

$$\underline{x} = \alpha_1 \underline{x}^1 + \alpha_2 \underline{x}^2 + \cdots + \alpha_m \underline{x}^m \ (\in \mathbb{R}^n).$$

$\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ sono definiti coefficienti della combinazione lineare.

Esempio:

$$\underline{x} = (3, 8, 12) \ \in \mathbb{R}^3$$

$$\underline{y} = (2, 0, 1) \in \ \mathbb{R}^3,$$

$$\underline{t} = (4, 0, 0) \ \in \mathbb{R}^3,$$

$$\underline{z} = (0, 2, 2) \ \in \mathbb{R}^3,$$

$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 1,\ \alpha_4 = 1 \Rightarrow$

$$\underline{s} = 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} \ \in \mathbb{R}^3$$

è una combinazione lineare di vettori $\underline{x}, \underline{y}, \underline{t}, \underline{z}$.

Combinazione convessa lineare di n vettori in $\mathbb{R}^m$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_n x_n$$

se $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Per $n = 2$, (due vettori) $\alpha_1 = \alpha$ e $\alpha_2 = 1 - \alpha$ con $\alpha \in [0, 1]$.

In questo caso la combinazione lineare convessa

$$\alpha\underline{x} + (1 - \alpha)\underline{y}$$

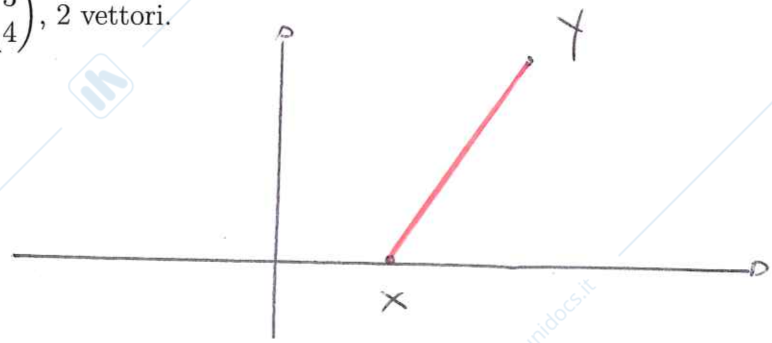
rappresenta tutti i punti del segmento

$$\{\alpha\underline{x} + (1 - \alpha)\underline{y} : \alpha \in [0, 1]\}$$

che unisce $\underline{x}$ e $\underline{y}$.

Esempio:

$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, 2 vettori.



$\forall \alpha \in [0, 1]$, $\{\alpha\underline{x} + (1 - \alpha)\underline{y}\}$ rappresenta i punti che appartengono al segmento che unisce $\underline{x}$ e $\underline{y}$:

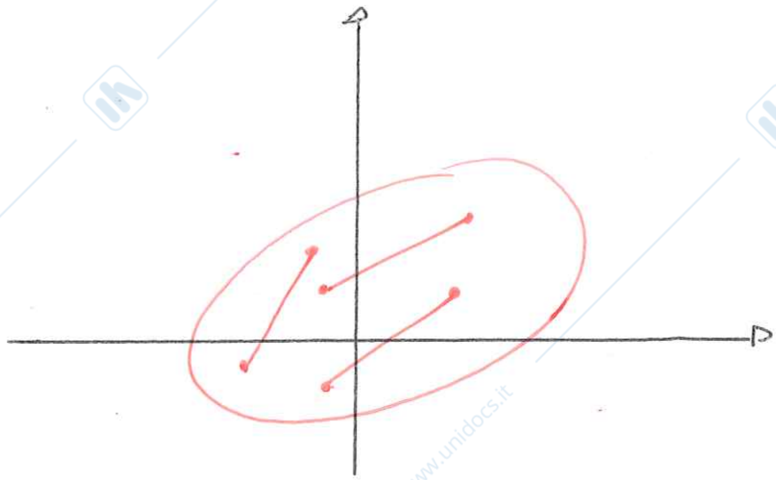
- per $\alpha = 0 \Rightarrow 0\underline{x} + (1 - 0)\underline{y} = \underline{y} \in$ segmento;
- per $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\underline{x} + \frac{1}{2}\underline{y} = (\frac{5}{2}, 2) \in$ segmento;
- per $\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}\underline{x} + \frac{2}{3}\underline{y} = (\frac{8}{3}, \frac{8}{3}) \in$ segmento ;

$\vdots$

Definizione. *767 Un insieme C di $\mathbb{R}^n$ è detto convesso se, per ogni coppia di punti $\underline{x}$, $\underline{y} \in C$, $\alpha\underline{x} + (1 - \alpha)\underline{y} \in C$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.*

Graficamente:

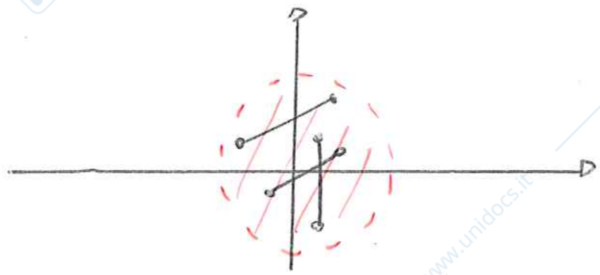
n=2



A è un insieme convesso: $\forall$ coppia di $\underline{x}$, $\underline{y} \in A$, il segmento che unisce $\underline{x}$ e $\underline{y} \in A$.

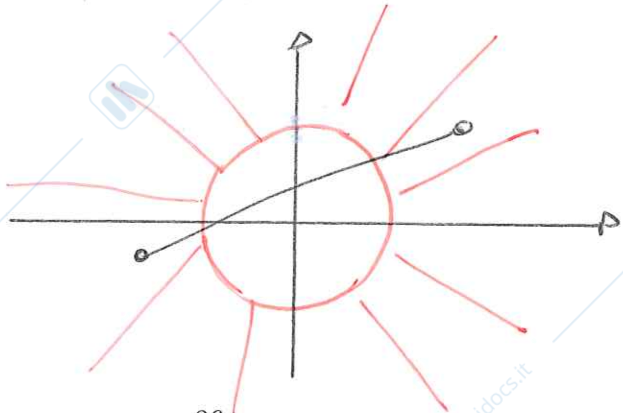
Esempio:

- $$A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$



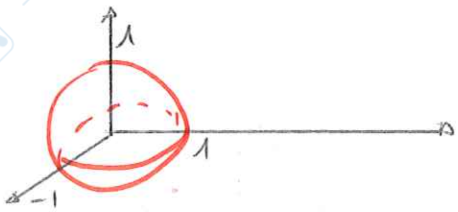
Quindi A è convesso.

- $$A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$$



A non convesso.

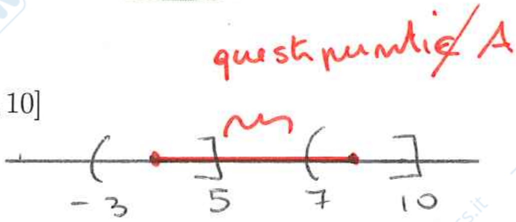
- $$A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$$



$\forall \underline{x}, \underline{y} \in A \Longrightarrow \alpha\underline{x} + (\alpha)\underline{y} \in A$. A è convesso.

- **Ciambella**: il miglior esempio di inseme non convesso in $\mathbb{R}^3$.

- $n = 1$: $A = (-3, 5] \cup (7, 10]$



A non è convessa.

- In $\mathbb{R}$, gli unici insiemi convessi sono gli intervalli (limitati o illimitati).
- $B_\epsilon(\underline{x}) = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^n : ||\underline{y} - \underline{x}|| < \epsilon\}$ di $\mathbb{R}^n$ sono convessi. Infatti, siano $\underline{y}^1$, $\underline{y}^2 \in B_\epsilon(\underline{x})$ e $\alpha \in [0, 1]$. Per le proprietà della norma vale:

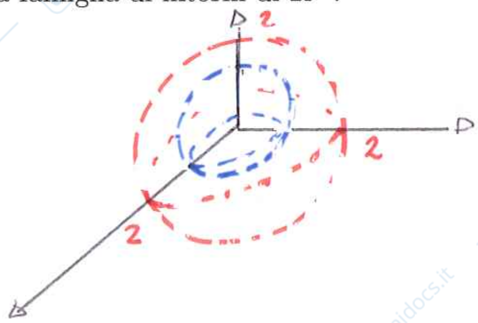
$$\begin{aligned} ||\underline{x} - (\alpha\underline{y}^1 + (1-\alpha)\underline{y}^2)|| &= ||\alpha\underline{x} + (1-\alpha)\underline{x} - (\alpha\underline{y}^1 + (1-\alpha)y^2)|| \\ &= ||\alpha(\underline{x} - \underline{y}^1) + (1-\alpha)(x - \underline{y}^2)|| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \alpha\underline{y}^1 + (1-\alpha)\underline{y}^2 \in B_\epsilon(\underline{x})$ implica che $B_\epsilon(\underline{x})$ è convesso.

Proposizione. *770 L'intersezione di insiemi convessi è ancora convessa.*

Esempio:

basta immaginare una famiglia di intorni di $\mathbb{R}^3$.



Norma e Distanza

Norma in $\mathbb{R}^n$: generalizza la nozione di $|\cdot|$ in $\mathbb{R}$.

$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, la norma di $\underline{x}$ è data da $\underline{\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}}$ $\in \mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$, $\forall \in \mathbb{R}$

$$\|x\| = \sqrt{x^2} = |\, x \,|$$

Proposizione. *108 Sia $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora*

1) $\|\underline{x}\| \geq 0$

2) $\|\underline{x}\| = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$

3) $\|\alpha \underline{x}\| = |\, \alpha \,|\, \|\underline{x}\|$

Proposizione. ***109 (Cauchy-Schwarz)***

Siano $\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$|\, \underline{x} \cdot \underline{y} \,| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$

Vale la uguaglianza quando se e solo se i vettori sono collineari.

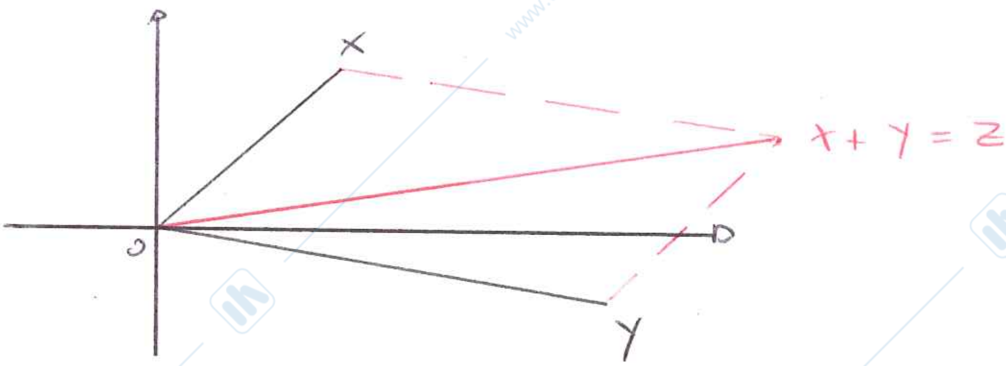
Corollario. *110 Disuguaglianza Triangolare*

Risulta $\forall\, \underline{x},\, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ *che*

$$\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$$

Dimostrazione: esercizio. Il risultato è ben noto per $n = 2$.

In $\mathbb{R}^2$



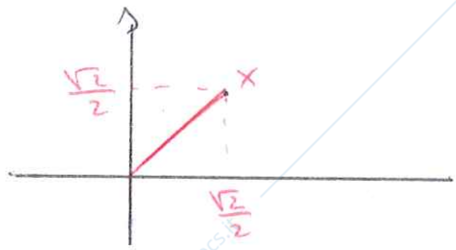
Esempio:

1. $\underline{x} = (3, -2, 4),\ \|\underline{x}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{29}$
2. $\underline{x} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0),\ \|\underline{x}\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0} = \sqrt{1} = 1$

- Un vettore di norma 1 è chiamato **versore**.

Esempio: Dato

– $\underline{x} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$,



- $\underline{y} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$,
- $\underline{z} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Sono versori:

$$\|\underline{y}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{1} = 1$$

- Vettori

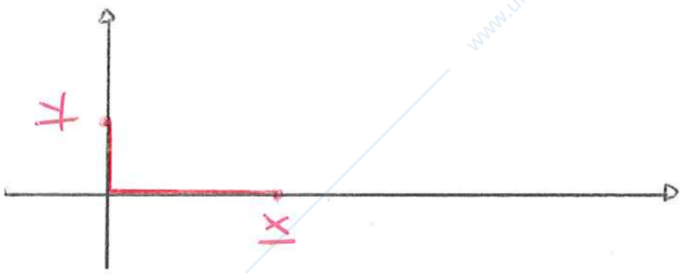
$$\underline{e_1} = (1, 0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$$
$$\underline{e_2} = (0, 1, 0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$$
$$\vdots$$
$$\underline{e_n} = (0, 0. \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n$$

sono versori e sono definiti come **i vettori fondamentali di** $\mathbb{R}^n$ (più avanti).

Ortogonalità

Due vettori $\underline{x}$ e $\underline{y}$ del piano possono essere considerati perpendicolari quando il loro prodotto scalare è zero, cioè, $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$.

$\underline{x} = (2, 0)$
$\underline{y} = (0, 1)$



Definizione. *112 Due vettori $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ sono detti ortogonali (o perpendicolari), e si scrive $\underline{x} \perp \underline{y}$, se*

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = 0.$$

Ne deriva che $\underline{x} \perp \underline{y}$ è equivalente a $\underline{y} \perp \underline{x}$ dalla proprietà commutativa del prodotto scalare.

Esempio:

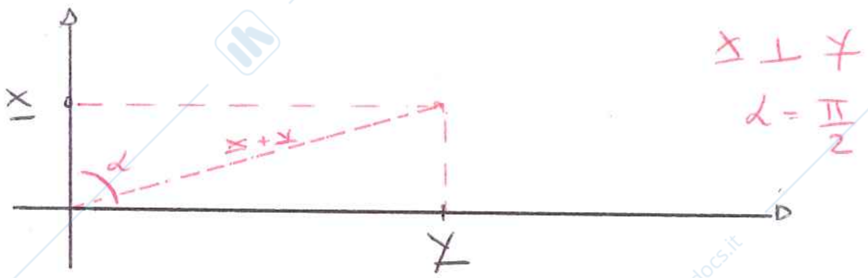
- Considera l'insieme dei versori in $\mathbb{R}^n$: $\{\underline{e_1}, \underline{e_2}, ..., \underline{e_n}\}$. Allora $\underline{e_i} \perp \underline{e_j}$ per ogni $i \neq j$ sono ortogonali. per esempio, per $\underline{e_1}$ e $\underline{e_2} \in \mathbb{R}^3$, allora $\underline{e_1} \cdot \underline{e_2} = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0$.
- Dato $\underline{x} = (1, -4, 1), \underline{y} = (0, 1, 4)$, allora $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$, quindi $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono ortogonali.

Un risultato molto importante è la seguente versione generale per $\mathbb{R}^n$ del ben noto **Teorema di Pitagora**:

Teorema. ***114, Pitagora*** *Siano $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$. Se $\underline{x} \perp \underline{y}$, allora*

$$||\underline{x} + \underline{y}||^2 = ||\underline{x}||^2 + ||\underline{y}||^2.$$

Dimostrazione: a casa come esercizio. Il risultato è ben noto per $n = 2$.



L'ortogonalità si estende in maniera naturale agli insiemi di vettori.

Definizione. ***115*** *Un insieme di vettori $\{x_i\}_{i=1}^k$ di $\mathbb{R}^n$ è detto ortogonale se i suoi elementi sono a coppie (a due a due) ortogonali.*

L'insieme $\{\underline{e_1}, \underline{e_2}, ..., \underline{e_n}\}$ dei versori è il più classico esempio di un insieme ortogonale. Infatti, come abbiamo visto, $\underline{e_i} \cdot \underline{e_j} = 0$ per ogni $i \neq j$.

Un insieme ortogonale di vettori con norma unitaria è detto **ortonormale**. Di nuovo, l'insieme $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, ..., \underline{e}_n\}$ è il più classico esempio di un insieme ortonormale.

In generale, dato un insieme ortogonale di vettori $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n\}$ di $\mathbb{R}^n$, l'insieme

$$\left\{ \frac{\underline{x}_1}{||\underline{x}_1||}, ..., \frac{\underline{x}_n}{||\underline{x}_n||} \right\}$$

ottenuto dividendo ogni elemento per la sua norma è ortonormale. E' facile infatti dimostrare che

$$\left|\left|\frac{\underline{x}_i}{||\underline{x}_i||}\right|\right| = \frac{1}{||\underline{x}_i||}||\underline{x}_i|| = 1 \ \forall i,$$

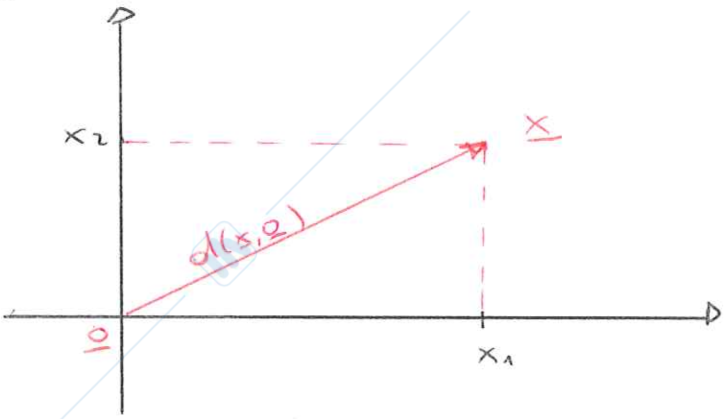
e per ogni $i \neq j$ vale

$$\frac{\underline{x}_i}{||\underline{x}_i||} \cdot \frac{\underline{x}_j}{||\underline{x}_j||} = \frac{1}{||\underline{x}_i||||\underline{x}_j||}\underline{x}_i \cdot \underline{x}_j = 0.$$

Distanza

Siano $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ e $\underline{0} \in \mathbb{R}^2$

$\underline{x} = (x_1, x_2)$

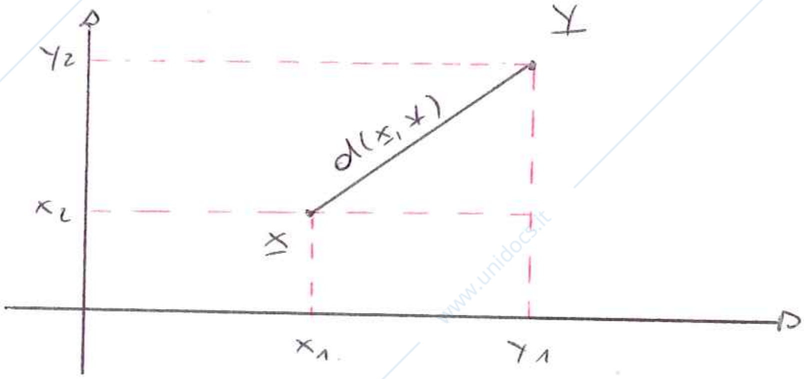


$$d(\underline{x}, \underline{0}) = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = ||\underline{x}||$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

quindi $\|\underline{x}\|$ rappresenta la distanza di $\underline{x}$ dall'origine.

Dati $\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}(\underline{x}, \underline{y})$?



$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = \|\underline{y} - \underline{x}\|$$

Quindi $\|\underline{y} - \underline{x}\|$ rappresenta la distanza di $\underline{x}$ da $\underline{y}$.

Definizione. *121 Si dice distanza Euclidea $d(\underline{x}, \underline{y})$ tra due vettori $\underline{x}$ e $\underline{y}$ in $\mathbb{R}^n$ la norma della loro differenza*

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

Let $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \implies$

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|x - y\| = \sqrt{0 + 1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

Let $\underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \implies$

$$d(\underline{x}, 0) = \|x\| = \sqrt{3^2 + 7^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{9 + 49 + 2} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

In $\mathbb{R}$ vale $d(x,y) = \mid x - y \mid$

Proposizione. *122 Siano $\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$. Allora*

i) $d(\underline{x},\underline{y}) \geq 0$

ii) $d(\underline{x},\underline{y}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{y}$

iii) $d(\underline{x},\underline{y}) = d(\underline{y},\underline{x})$

iv) $d(\underline{x},\underline{y}) \leq d(\underline{x},\underline{z}) + d(\underline{z},\underline{y})\ \forall \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ *(disuguaglianza triangolare)*

In $\mathbb{R}^3$ La distanza Euclidea tra il punto (-3,4,2) e l'origine è:

$$d(\underline{x},\underline{0}) = \|\underline{x}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$