

# Matematica per le Applicazioni Economiche I, 11 febbraio 2020

## Testo A

Durata della prova: 105 minuti. Indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola su ciascun foglio protocollo utilizzato.

**Spiegare con molta cura le risposte fornite.**

**Esercizio 1.** (10 punti) Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 1}$$

**Esercizio 2.** (7 punti)

1. Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e un insieme  $E \subseteq A$ , si diano le definizioni di punto massimo e di punto di minimo di  $f$  nell'insieme  $E$ .
2. Si enunci il Teorema di Weierstrass.
3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

si verifichi se ad  $f$  si può applicare il Teorema di Weierstrass nell'intervallo  $[-1, 1]$ . Indipendentemente dalla risposta al quesito precedente, si trovino, se esistono, i punti di massimo e minimo di  $f$  nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

**Esercizio 3.** (7 punti)

1. Si enunci il teorema di Lagrange (o del valor medio).
2. Si verifichi se la funzione  $f(x) = x^2 + |x|$ ,  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange.

**Esercizio 4.** (8 punti) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + x)}$$

**Esercizio 5.** (8 punti) Data la funzione di due variabili  $F$  definita sull'insieme  $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$

$$F(x, y) = 6x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$$

1. Si determini la curva di livello di  $F$  per la quota 6, indicata con  $A_6$ , e la si rappresenti nel piano cartesiano.
2. Dato  $(x_0, y_0) = (27, 36)$ , si calcolino  $F(x_0, y_0)$ , le derivate parziali  $F_1(x_0, y_0)$  e  $F_2(x_0, y_0)$ , e si utilizzi l'approssimazione lineare di  $F(x, y)$  vicino a  $(x_0, y_0)$  per approssimare  $F(26, 35)$ .

## Matematica per le Applicazioni Economiche I, 11 febbraio 2020

## Testo B

Durata della prova: 105 minuti. Indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola su ciascun foglio protocollo utilizzato.

Spiegare con molta cura le risposte fornite.

**Esercizio 1.** (10 punti) Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{x+1}$$

**Esercizio 2.** (7 punti)

1. Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e un insieme  $E \subseteq A$ , si diano le definizioni di punto massimo e di punto di minimo di  $f$  nell'insieme  $E$ .
2. Si enunci il Teorema di Weierstrass.
3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x^2) & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

si verifichi se ad  $f$  si può applicare il Teorema di Weierstrass nell'intervallo  $[-1, 1]$ . Indipendentemente dalla risposta al quesito precedente, si trovino, se esistono, i punti di massimo e minimo di  $f$  nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

**Esercizio 3.** (7 punti)

1. Si enunci il teorema di Lagrange (o del valor medio).
2. Si verifichi se la funzione  $f(x) = x^2 + |x|$ ,  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange.

**Esercizio 4.** (8 punti) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + 2x)}$$

**Esercizio 5.** (8 punti) Data la funzione di due variabili  $F$  definita sull'insieme  $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$

$$F(x, y) = 9x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$$

1. Si determini la curva di livello di  $F$  per la quota 9, indicata con  $A_9$ , e la si rappresenti nel piano cartesiano.
2. Dato  $(x_0, y_0) = (36, 8)$ , si calcolino  $F(x_0, y_0)$ , le derivate parziali  $F_1(x_0, y_0)$  e  $F_2(x_0, y_0)$ , e si utilizzi l'approssimazione lineare di  $F(x, y)$  vicino a  $(x_0, y_0)$  per approssimare  $F(35, 9)$ .

# Matematica per le Applicazioni Economiche I, 11 febbraio 2020

## Testo C

Durata della prova: 105 minuti. Indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola su ciascun foglio protocollo utilizzato.

**Spiegare con molta cura le risposte fornite.**

**Esercizio 1.** (10 punti) Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = x + \frac{2}{x+1}$$

**Esercizio 2.** (7 punti)

1. Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e un insieme  $E \subseteq A$ , si diano le definizioni di punto massimo e di punto di minimo di  $f$  nell'insieme  $E$ .
2. Si enunci il Teorema di Weierstrass.
3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

si verifichi se ad  $f$  si può applicare il Teorema di Weierstrass nell'intervallo  $[-1, 1]$ . Indipendentemente dalla risposta al quesito precedente, si trovino, se esistono, i punti di massimo e minimo di  $f$  nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

**Esercizio 3.** (7 punti)

1. Si enunci il teorema di Lagrange (o del valor medio).
2. Si verifichi se, nell'intervallo  $[0, 3]$ , la funzione  $g(x) = \frac{2}{x-3}$ , soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange.

**Esercizio 4.** (8 punti) Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1+x)}$$

**Esercizio 5.** (8 punti) Data la funzione di due variabili  $F$  definita sull'insieme  $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$

$$F(x, y) = 10x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$$

1. Si determini la curva di livello di  $F$  per la quota 5, indicata con  $A_5$ , e la si rappresenti nel piano cartesiano.
2. Dato  $(x_0, y_0) = (27, 49)$ , si calcolino  $F(x_0, y_0)$ , le derivate parziali  $F_1(x_0, y_0)$  e  $F_2(x_0, y_0)$ , e si utilizzi l'approssimazione lineare di  $F(x, y)$  vicino a  $(x_0, y_0)$  per approssimare  $F(26, 50)$ .

## Soluzioni testo A

1. L'insieme di definizione della funzione è  $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ . Poiché  $f$  è somma e quoziente di funzioni elementari,  $f$  è continua e derivabile in  $A$ ;  $f$  non presenta simmetrie.

Poiché  $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ , si deduce che non esiste alcun  $x \in A$  tale che  $f(x) = 0$ . Inoltre,  $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

La derivata prima di  $f$  è

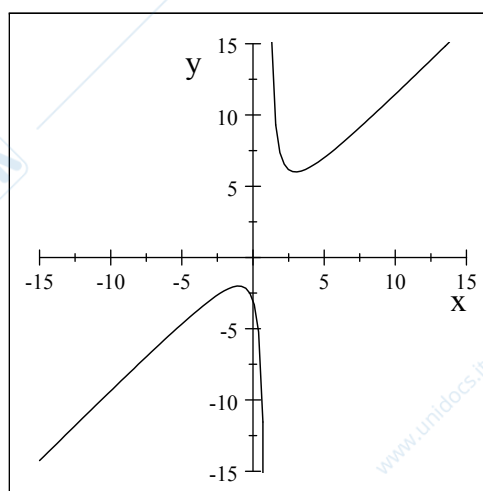
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

e  $f'(x) > 0$  in  $(-\infty, -1)$ ,  $f'(x) < 0$  in  $(-1, 1) \cup (1, 3)$ ,  $f'(x) > 0$  in  $(3, +\infty)$ . Dunque  $f$  è strettamente crescente in  $(-\infty, -1)$ , strettamente decrescente in  $(-1, 1)$ , strettamente decrescente in  $(1, 3)$ , strettamente crescente in  $(3, +\infty)$ . Il punto  $x = -1$  è punto di massimo locale (con  $f(-1) = -2$ ); il punto  $x = 3$  è punto di minimo locale (con  $f(3) = 6$ ).

La derivata seconda di  $f$  è

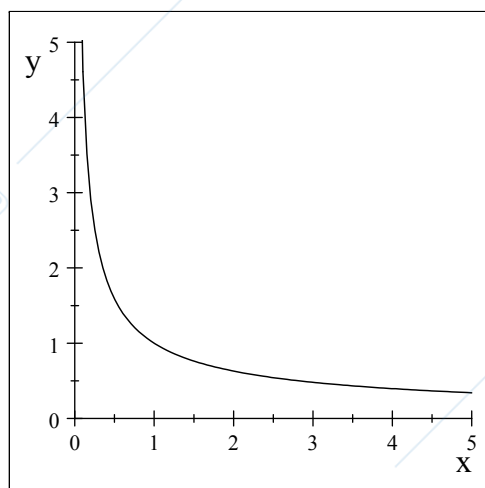
$$f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$$

e  $f''(x) < 0$  in  $(-\infty, 1)$ ,  $f''(x) > 0$  in  $(1, +\infty)$ . Dunque  $f$  è concava in  $(-\infty, 1)$ , è convessa in  $(1, +\infty)$ . Il grafico di  $f$  è



2. Punti 1 e 2: si veda il libro di testo. Riguardo al punto 3, si noti che  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ , quindi  $f$  non è continua in  $x = 0$ . Pertanto il Teorema di Weierstrass non è applicabile e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  implica che non esista alcun punto di minimo globale per  $f$ . Esiste tuttavia un punto di massimo globale per  $f$ , che è  $x_M = -1$  perché  $f$  è strettamente decrescente nell'intervallo  $[-1, 0]$  ed è strettamente crescente nell'intervallo  $(0, 1]$ , con  $f(1) = 0 < f(-1) = e$ .
3. Punto 1: si veda il libro di testo. Riguardo al punto 2,  $f$  non è derivabile in  $x = 0 \in (-1, 2)$  dato che  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = -1 \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1$ . Pertanto  $f$  non soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange.
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$ .  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot 2 \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$ .

5. Si ha  $A_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 6x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} = 1\}$  e  $6x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} = 6$  equivale a  $y = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ , con il seguente grafico



Inoltre,  $F(x_0, y_0) = 108$  e  $F_1(x, y) = 2x^{-2/3}y^{1/2}$ ,  $F_2(x, y) = 3x^{1/3}y^{-1/2}$ , quindi  $F_1(x_0, y_0) = 4/3$ ,  $F_2(x_0, y_0) = 3/2$ . Pertanto

$$F(26, 35) \simeq 108 + 4/3 \cdot (-1) + 3/2 \cdot (-1) = 108 - 17/6$$

## Soluzioni Testo B

1. L'insieme di definizione della funzione è  $A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ . Poiché  $f$  è somma e quoziente di funzioni elementari,  $f$  è continua e derivabile in  $A$ ;  $f$  non presenta simmetrie.

Poiché  $f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$ , si deduce che non esiste alcun  $x \in A$  tale che  $f(x) = 0$ . Inoltre,  $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

La derivata prima di  $f$  è

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2}$$

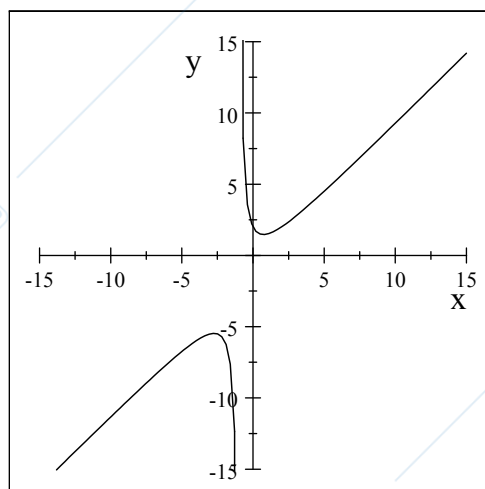
e  $f'(x) > 0$  in  $(-\infty, -1 - \sqrt{3})$ ,  $f'(x) < 0$  in  $(-1 - \sqrt{3}, -1) \cup (-1, -1 + \sqrt{3})$ ,  $f'(x) > 0$  in  $(-1 + \sqrt{3}, +\infty)$ . Dunque  $f$  è strettamente crescente in  $(-\infty, -1 - \sqrt{3})$ , strettamente decrescente in  $(-1 - \sqrt{3}, -1)$ , strettamente decrescente in  $(-1, -1 + \sqrt{3})$ , strettamente crescente in  $(-1 + \sqrt{3}, +\infty)$ . Il punto  $x = -1 - \sqrt{3}$  è punto di massimo locale (con  $f(-1 - \sqrt{3}) = -2 - 2\sqrt{3}$ ); il punto  $x = -1 + \sqrt{3}$  è punto di minimo locale (con  $f(-1 + \sqrt{3}) = -2 + 2\sqrt{3}$ ).

La derivata seconda di  $f$  è

$$f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

e  $f''(x) < 0$  in  $(-\infty, -1)$ ,  $f''(x) > 0$  in  $(-1, +\infty)$ . Dunque  $f$  è concava in  $(-\infty, -1)$ , è convessa

in  $(-1, +\infty)$ . Il grafico di  $f$  è



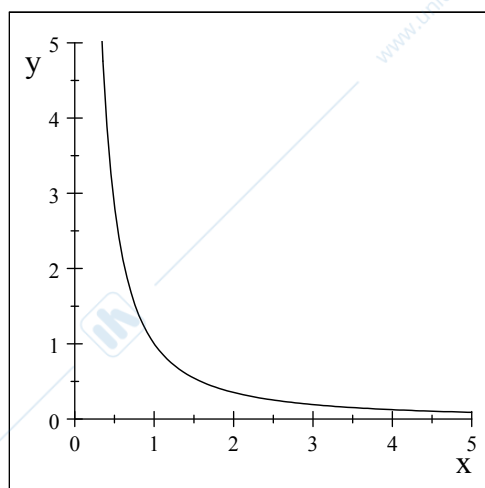
2. Punti 1 e 2: si veda il libro di testo. Riguardo al punto 3, si noti che  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ , quindi  $f$  non è continua in  $x = 0$ . Pertanto il Teorema di Weierstrass non è applicabile e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  implica che non esista alcun punto di massimo globale per  $f$ . Esiste tuttavia un punto di minimo globale per  $f$ , che è  $x_m = 0$  perché  $f$  è strettamente decrescente nell'intervallo  $[-1, 0]$ , è strettamente decrescente nell'intervallo  $(0, 1]$  (ma non è strettamente decrescente nell'intervallo  $[-1, 1]!$ ), con  $f(0) = 0 < f(1) = 1$ .

3. Punto 1: si veda il libro di testo. Riguardo al punto 2,  $f$  non è derivabile in  $x = 0 \in (-1, 2)$  dato che  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1 \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1$ . Pertanto  $f$  non soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange.

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x) \frac{\sqrt{x^2 + 2} + x}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\ln(1 + 2x)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

5. Si ha  $A_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 9x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} = 9\}$  e  $9x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} = 9$  equivale a  $y = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ , con il seguente grafico



Inoltre,  $F(x_0, y_0) = 108$  e  $F_1(x, y) = \frac{9}{2}x^{-1/2}y^{1/3}$ ,  $F_2(x, y) = 3x^{1/2}y^{-2/3}$ , quindi  $F_1(x_0, y_0) = 3/2$ ,  $F_2(x_0, y_0) = 9/2$ . Pertanto

$$F(35, 9) \simeq 108 + 3/2 \cdot (-1) + 9/2 \cdot (1) = 111$$

## Soluzioni testo C

1. L'insieme di definizione della funzione è  $A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ . Poiché  $f$  è somma e quoziente di funzioni elementari,  $f$  è continua e derivabile in  $A$ ;  $f$  non presenta simmetrie.

Poiché  $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x+1}$ , si deduce che non esiste alcun  $x \in A$  tale che  $f(x) = 0$ . Inoltre,  $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

La derivata prima di  $f$  è

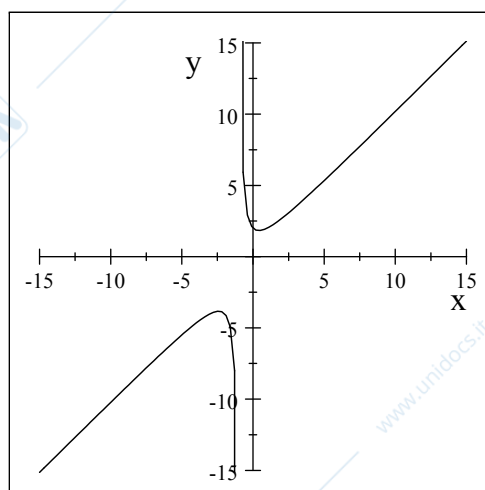
$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}$$

e  $f'(x) > 0$  in  $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ ,  $f'(x) < 0$  in  $(-1 - \sqrt{2}, -1) \cup (-1, -1 + \sqrt{2})$ ,  $f'(x) > 0$  in  $(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$ . Dunque  $f$  è strettamente crescente in  $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ , strettamente decrescente in  $(-1 - \sqrt{2}, -1)$ , strettamente decrescente in  $(-1, -1 + \sqrt{2})$ , strettamente crescente in  $(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$ . Il punto  $x = -1 - \sqrt{2}$  è punto di massimo locale (con  $f(-1 - \sqrt{2}) = -1 - 2\sqrt{2}$ ); il punto  $x = -1 + \sqrt{2}$  è punto di minimo locale (con  $f(-1 + \sqrt{2}) = -1 + 2\sqrt{2}$ ).

La derivata seconda di  $f$  è

$$f''(x) = \frac{4}{(x + 1)^3}$$

e  $f''(x) < 0$  in  $(-\infty, -1)$ ,  $f''(x) > 0$  in  $(-1, +\infty)$ . Dunque  $f$  è concava in  $(-\infty, -1)$ , è convessa in  $(-1, +\infty)$ . Il grafico di  $f$  è



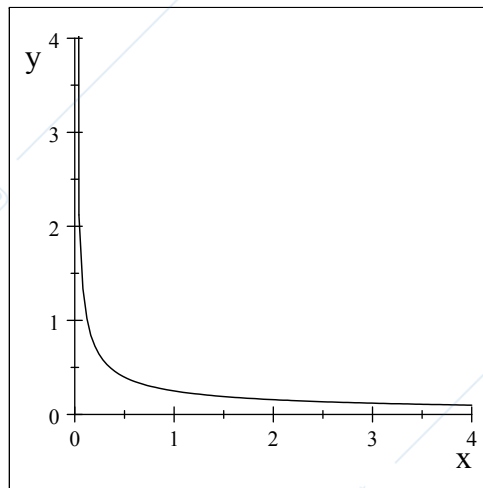
2. Punti 1 e 2: si veda il libro di testo. Riguardo al punto 3, si noti che  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ , quindi  $f$  non è continua in  $x = 0$ . Pertanto il Teorema di Weierstrass non è applicabile e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  implica che non esista alcun punto di minimo globale per  $f$ . Esiste tuttavia un punto di massimo globale per  $f$ , che è  $x_M = -1$  perché  $f$  è strettamente decrescente nell'intervallo  $[-1, 0]$  ed è strettamente crescente nell'intervallo  $(0, 1]$  con  $f(1) = 0 < f(-1) = e$ .

3. Punto 1: si veda il libro di testo. Riguardo al punto 2,  $g$  non è definita in  $x = 3$ ; pertanto  $g$  non soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange.

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x) \frac{\sqrt{x^2 + 3} + x}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot 3 \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3.$$

5. Si ha  $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 10x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} = 5\}$  e  $10x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} = 5$  equivale a  $y = \frac{1}{4x^{\frac{2}{3}}}$ , con il seguente grafico



Inoltre,  $F(x_0, y_0) = 210$  e  $F_1(x, y) = \frac{10}{3}x^{-2/3}y^{1/2}$ ,  $F_2(x, y) = 5x^{1/3}y^{-1/2}$ , quindi  $F_1(x_0, y_0) = 70/27$ ,  $F_2(x_0, y_0) = 15/7$ . Pertanto

$$F(26, 50) \simeq 210 + 70/27 \cdot (-1) + 15/7 \cdot (1) = 210 - \frac{85}{189}$$