Teorema Unicità del Limite per Successioni

Sia $\{a_n\}$ succ. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ allora tale valore del limite è unico

Dimostrazione: Supponiamo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Dobbiamo dimostrare che $a=b$

Per definizione di limite si ha che
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq N$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_n - b| < \varepsilon \ \forall n \geq M$

Usando la disuguaglianza triangolare: $|a-b| = |(a-a_n)-(b-a_n)| \leq |a-a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon$ $\begin{cases} \forall n \geq N \\ \forall n \geq M \end{cases}$

Dunque $|a-b| < 2\varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$. L'unica scelta di a, b per verificare la disequazione con $\varepsilon > 0$ è $a=b$ ■

Teorema dei Carabinieri

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ succ. t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n \leq c_n$. Allora se $\begin{cases} a_n \to \alpha \\ c_n \to \alpha \end{cases} \Rightarrow b_n \to \alpha$

Dimostrazione: Abbiamo fissato che $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \\ \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha \end{cases}$ cioè $\forall \varepsilon > 0$ $\begin{cases} |a_n - \alpha| < \varepsilon \ \ \forall n > n_1 \iff \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \\ |c_n - \alpha| < \varepsilon \ \ \forall n > n_2 \iff \alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon \end{cases}$

Ma $a_n \leq b_n \leq c_n \longrightarrow \alpha - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \alpha + \varepsilon \implies \alpha - \varepsilon < b_n < \alpha + \varepsilon$. $\forall n > N$ dove $N = \max\{n_1, n_2\}$

Ma per def. di lim. è equivalente a dire che $|b_n - \alpha| < \varepsilon \iff \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ che dimostra ■

Teorema Bolzano-Weierstrass

Sia $\{a_n\}$ una succ. limitata. Allora esiste una sottosucc. $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ convergente

Dimostrazione: Essendo $\{x_n\}$ limitata vuol dire che $\exists I = [a,b]$ t.c. $a \leq x_n \leq b$

Per bisezione, consideriamo il punto $c = \frac{a+b}{2}$.

Allora uno dei due intervalli $[a,c]$ o $[c,b]$ deve contenere x_n per un numero infinito di indici.

($[a,c]$, $[c,b]$ possono contenere entrambi infiniti termini, ma non possono contenerne finiti dato che almeno uno dei due deve contenere il termine a_n per infiniti n)

Scelgo uno dei due intervalli e lo chiamo $[a_1, b_1]$. Si ha $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$

Sia ora x_{n_1} qualsiasi elemento della succ. (x_n) che appartiene a $[a_1, b_1]$ e sia $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$
Ripetiamo il ragionamento precedente tra gli intervalli $[a_1, c_1]$ e $[c_1, b_1]$ e scelgo quello che contiene x_n $(n > n_1)$ per un numero infinito di n e chiamo questo intervallo $[a_2, b_2]$.
Sia x_{n_2} qualsiasi elemento della succ (x_n) che appartiene a $[a_2, b_2]$.
Continuando con questo procedimento costruisco tre succ. a_k, b_k, x_{n_k} tali che:

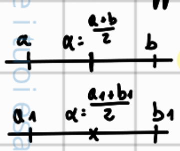
1) a_k è crescente, b_k è decrescente
2) $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$
3) (x_{n_k}) è una sottosucc. di (x_n)
4) $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Poiché (a_k) è monotona e limitata (superiormente da b e inferiormente da a) allora $\exists \lim_{k\to+\infty} a_k = \bar{x}$ e per la 2) anche $\lim_{k\to+\infty} b_k = \bar{x}$ cosicché anche la 4) per il TEO. CARABINIERI si ha che $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x}$ $\blacksquare$

Teorema degli zeri

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua t.c. $f(a)\cdot f(b)<0$ con $\begin{cases} f(a)>0 \\ f(b)<0 \end{cases}$ o viceversa. Allora $\exists c \in (a,b)$ t.c. $f(c)=0$

Dim: Supponendo $f(a)<0$ e $f(b)>0$. Per bisezione pongo $\alpha = \frac{a+b}{2}$ $\begin{cases} \bullet\ f(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha = c \text{ finito!} \\ \bullet\ f(\alpha)<0 \to a_1 = \alpha,\ b_1 = b \\ \bullet\ f(\alpha)>0 \to a_1 = a,\ b_1 = \alpha \end{cases}$ $\begin{cases} a \leq b_n \\ a_n \leq b \\ a \leq a_n \leq b_n \leq b \end{cases}$



Itero: $\begin{cases} f(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha = c \\ f(\alpha)<0 \to a_2=\alpha,\ b_2=b_1 \\ f(\alpha)>0 \to a_2 = a_1,\ b_2=\alpha \end{cases}$ Costruisco due sottosucc. $\bullet\, a_n \nearrow$ e $\bullet\, b_n \searrow$ dove $a_n \geq a$, $b_n \leq b$ e
Dunque per monotonia $a_n \to \varepsilon_1$, $b_n \to \varepsilon_2$ con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$
Inoltre $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$, $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ che $\xrightarrow{n\to+\infty} 0$
Ma allora $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \lim_{n\to+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{2^n}\right) = 0$. Cioè $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$
Quindi se $f(a_n)\cdot f(b_n) < 0$ con $a_n \to \varepsilon \leftarrow b_n \Rightarrow f(\varepsilon)^2 \leq 0$. Ma essendo una funzione reale al quadrato non può essere minore di zero, ma solo uguale, cioè $f(\varepsilon)=0$. Concludo ponendo $c = \varepsilon$ $\blacksquare$

Teorema dei valori intermedi

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e sia $\alpha \in [m,M]$ dove $m = \min(f)$ e $M = \max(f)$. Allora $\exists x \in [a,b] : f(x) = \alpha$

Dim: $g(x) = f(x) - \alpha$. Per il TEO. WEIERS. $\Rightarrow \begin{cases} \exists x_m \text{ t.c. } f(x_m) = m \\ \exists x_M \text{ t.c. } f(x_M) = M \end{cases}$
$g(x_m) = f(x_m) - \alpha \leq 0$ e $g(x_M) = f(x_M) - \alpha \geq 0$. Per il TEO. ZERI $\exists \varepsilon$ tra x_m e x_M t.c. $g(\varepsilon) = f(\varepsilon) - \alpha = 0$ $\blacksquare$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Allora ammette max e min.

Dim: Dimostriamo l'esistenza del minimo (per il massimo è analogo)

Posto $m = \inf_{[a,b]} f$ $\exists$ una succ. $x_n \in [a,b]$ t.c. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = m$

Infatti, se $m=-\infty$, per definizione, f non sarebbe limitata inferiormente e quindi $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in[a,b]$ t.c. $f(x_n)<-n$ e perciò $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty = m$.

Se invece $m\in\mathbb{R}$, allora m è il massimo dei minoranti di $Im(f)$, quindi $\forall n\in\mathbb{N}$, $m+\frac{1}{n} > m$ non può essere un minorante, cioè deve esistere $x_n\in[a,b]$ t.c. $f(x_n)<m+\frac{1}{n}$.

Poiché d'altra parte $m\le f(x_n)$ per il TEO. CONFRONTO si ha $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=m$.

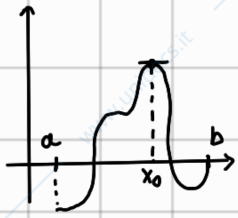
Applicando il TEO. BOLZ-WEIE alla succ. limitata (x_n) si ottiene una sottosucc. (x_{n_k}) convergente a $\bar{x}\in\mathbb{R}$.

Poiché l'insieme $[a,b]$ è chiuso, allora $\bar{x}\in[a,b]$. Inoltre, poiché $(f(x_{n_k}))$ è una sottosucc. di $(f(x_n))$ che conv. ad m, allora anche $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = m$. Per continuità di f si ha che $m=\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$ $\blacksquare$

TEOREMA FERMAT

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile in $[a,b]$, sia $x_0\in(a,b)$ un max o un min. Allora $f'(x_0)=0$

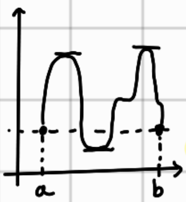
Dim:



So che $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell\in\mathbb{R}$. Sia x_0 un max $\Rightarrow f(x_0)\ge f(x)\ \forall x\in[a,b]$ (x_0 esiste per il TEO. WEIER.) $\Rightarrow \lim_{h\to0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell^+$. $\ell^+\le 0$ perché se $h>0$, $f(x_0+h)-f(x_0)\le 0$

Il loro rapporto è ≤ 0. Analogamente, $\ell^-\ge 0$. Ma so che $\ell^+=\ell^-$ perché il limite esiste $\Rightarrow \ell^+=\ell^-=0$ $\blacksquare$

TEOREMA DI ROLLE



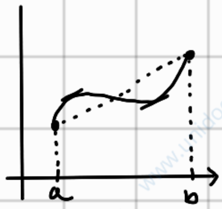
c è max o min

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile in $[a,b]$ t.c. $f(a)=f(b)$. Allora $\exists c\in(a,b)$ t.c. $f'(c)=0$

Dim: ① Se f è costante $=\bar{c} \Rightarrow f'(\bar{c})=0$ $\forall c\in(a,b)$

② Se f non è costante: $\exists x_m$ min e $\exists x_M$ max per il TEO WEIER. Se x_m e x_M sono agli estremi di $[a,b]$, allora f è costante. Quindi $\exists x_m$ o $x_M\in(a,b)$ per il TEO FERMAT $\Rightarrow f'(x_m)=0$ o $f'(x_M)=0$ $\blacksquare$

Teorema di Lagrange



$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile. Allora $\exists c\in(a,b)$ t.c. $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Dim: Sia $g(x)=f(x)-Kx$ $\begin{cases} g(x) \text{ continua in } [a,b] \text{ perché somma di funzioni continue in } [a,b] \\ g(x) \text{ derivabile in } (a,b) \text{ perché somma di funzioni derivabili in } (a,b)\end{cases}$

Determiniamo K in modo che $g(a)=g(b)$. Abbiamo dunque: $f(a)-Ka=f(b)-Kb \to K=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Sostituiamo nella funzione $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$. Per il $\overset{\text{TEO}}{\text{ROLLE}}\Rightarrow \exists c\in(a,b)$ t.c. $g'(c)=0$.

Deriviamo $g(x)$: $g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Nel punto c avremo: $g'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\Longrightarrow f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\blacksquare$

Teorema Sviluppo di Taylor

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ e supponiamo $f\in C^{n+1}((a,b))$ cioè derivabile $(n+1)$ volte

Sia $T_n(x)=\dfrac{f(x_0)}{0!}+\dfrac{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{1!}+\dfrac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+\dfrac{f^{n}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$. Allora $f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n)$

Osserva:
- Date due funzioni f,g posso dire che $f=g+\underbrace{(f-g)}_{\text{resto}}$
- Possiamo fissare $x_0=0\Longrightarrow \tilde{f}(x)=f(x+x_0)$
- Il teorema ci dice che una funzione somiglia "localmente" a un polinomio.

Dimostra: Fissato $x_0=0$, voglio dimostrare $f(x)=T_n(x)+o(x^n)$ dove $T_n(x)=f(0)+f'(0)+\dfrac{f''(0)\cdot x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{f^{n}(0)\cdot x^n}{n!}$. Ossia $\dfrac{f(x)-T_n(x_0)}{x^n}\to 0$

Idea: Uso il $\overset{\text{TEO}}{\text{DE L'HOPITAL}}$ n-volte: ① $\dfrac{f'(x)-T_n'(x)}{n\cdot x^{n-1}}=\dfrac{f'(x)-\left(0+f'(0)+f''(0)x+\ldots+\frac{f^{n}(0)\cdot n\cdot x^{n-1}}{n!}\right)}{n\cdot x^{n-1}}$

② Riderivo: $\dfrac{f''(x)-\left(0+f''(0)+\frac{f'''(0)\cdot 3\cdot 2\cdot x}{3!}+\ldots+\frac{f^{n}(0)\,x^{n-2}}{(n-2)!}\right)}{n(n-1)\,x^{n-2}}$ ③ Derivo n-volte: $\dfrac{f^{(n)}(x)-\left(f^{n}(0)\,n!\cdot\frac{1}{n!}\right)}{n!\cdot x^0}=\dfrac{1}{n!}\left(f^{n}(x)-f^{n}(0)\right)$

Per $x\to 0$, ottengo che $\frac{1}{n!}\left(f^{n}(x)-f^{n}(0)\right)\to 0$ (f^{n} continua). Dunque procedendo a ritroso ottengo per $\overset{\text{DE}}{\text{L'HOPITAL}}$ che $\dfrac{(f(x)-T_n(x))^k}{(x^n)^k}\to 0$ $\forall k\in\{0,\ldots,n\}$ il che conclude $\blacksquare$

Teorema Condizione Necessaria per Convergenza

$\{a_n\}$ succ. Allora $\sum a_n$ converge $\Longrightarrow a_n\to 0$

Dim: $S_n=a_0+\ldots+a_n$. $\sum a_n$ converge equivale a $S_n\to S\in\mathbb{R}$. Ma allora $a_n=\underbrace{S_n}_{(a_0+\ldots+a_{n-1})+a_n}-\underbrace{S_{n-1}}_{(a_0+\ldots+a_{n-1})}\longrightarrow S-S=0$ $\blacksquare$

Criterio della Radice (no dim)

$\{a_n\}$ succ. t.c. $a_n \geq 0$. Se $\sqrt[n]{a_n} = (a_n)^{\frac{1}{n}} \to l$ allora $\begin{cases} l > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty \\ l < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \end{cases}$

Criterio del Rapporto

$\{a_n\}$ succ. t.c. $a_n > 0$. Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$ allora $\begin{cases} l > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty \\ l < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \end{cases}$

Dim: Per il IV Corollario di Stolz-Cesaro sappiamo che se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to l$. Da qui concludiamo con il criterio radice
(Stolz-Cesaro: se $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to l$ allora $\frac{a_n}{b_n} \to l$ (con $a_n, b_n > 0$ e $b_n \nearrow +\infty$))

Criterio Confronto Asintotico

1) $a_n, b_n \geq 0$. Se $a_n \sim b_n$ (ossia $\frac{a_n}{b_n} \to 1$) allora $\sum a_n$ conv. $\Leftrightarrow \sum b_n$ conv.
2) $a_n = o(b_n)$ $\left(\frac{a_n}{b_n} \to 0\right)$ allora $\left(\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < \infty\right)$ e $\left(\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty\right)$

Dim: Poniamo $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ e $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $\forall n$. Poiché $a_n, b_n \geq 0$ $\forall n$, le succ. $\{S_n\}$ e $\{t_n\}$ sono non decrescenti.
Inoltre $a_k \leq b_k$, $\forall k \Rightarrow S_n \leq t_n$ $\forall n$.
La convergenza della serie $\sum b_n$ significa che $\{t_n\}$ è superiormente limitata (TEO. SUCC. MONOTONE). Allora $S_n \leq t_n \leq \sup_n t_n$ $\nearrow$ $\begin{cases} \{S_n\} \text{ superior. limitata} \\ \sup_n S_n \leq \sup_n t_n \end{cases}$
Il TEO SUCC MONOT implica che la succ $\{S_n\}$ (cioè la $\sum a_n$) è convergente (con $\lim = \sup_n S_n$) e vale $\sum a_n = \sup_n S_n \leq \sup_n t_n = \sum b_n$
• Supponiamo $\sum a_n$ divergente. Se $\sum b_n$ fosse conv. si avrebbe che $\sum a_n$ deve convergere. Dunque anche $\sum b_n$ deve divergere ■

Criterio Convergenza Assoluta

$\{a_n\}$ succ. t.c. $\sum |a_n|$ conv. $\Longrightarrow \sum a_n$ conv.

Dim: Creo due succ. $\{a_n^+\}$ e $\{a_n^-\}$ dove $a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n > 0 \\ 0 & \text{se } a_n \leq 0 \end{cases} = \max\{a_n, 0\}$ e $a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{se } a_n \leq 0 \\ 0 & \text{se } a_n > 0 \end{cases} = \max\{-a_n, 0\}$

$a_n^+ \geq 0$ e $a_n^- \geq 0$ • $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ • $a_n^+ \leq |a_n|$ e $a_n^- \leq |a_n|$

$\sum |a_n|$ conv. $\xRightarrow{\text{CR. CONFR.}}$ $\sum a_n^\pm$ conv. $S_n = a_0 + \ldots + a_n \overset{(*)}{=} S_n^+ - S_n^-$ dove $S_n^\pm = a_0^\pm + \ldots + a_n^\pm$

(*) $a_0 + \ldots + a_n = (a_0^+ - a_0^-) + \ldots + (a_n^+ - a_n^-)$. Per def. di serie conv. S_n^+ e S_n^- convergono e dunque $S_n = S_n^+ - S_n^-$ converge ■

Def: Integrale alla Reimann

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata. $A(f)=\{s(f,P) \mid P \text{ partizione}[a,b]\}$, $B(f)=\{S(f,P) \mid P \text{ partizione}[a,b]\}$ $\left(\begin{array}{l} S: \text{somme sup.} \\ s: \text{somme inf.}\end{array}\right)$

Allora $(A(f), B(f))$ è una coppia di Dedekind $(s(f,P)\le S(f,P))$

Per def. $\exists\,\gamma$ separatore tra $A(f)$ e $B(f)$, $\alpha\le\gamma\le\beta$ $\forall\alpha\in A$ e $\forall\beta\in B$

Diremo che f è integrabile alla Reimann in $[a,b]$ e scriveremo $f\in\mathcal{R}([a,b])$ se γ è unico (in tal caso $\gamma=\sup A(f)=\inf B(f)$). Scriveremo $\gamma=\int_a^b f(x)\,dx$

Condizione Necessaria e Sufficiente per l'integrabilità

Consideriamo un intervallo chiuso e limitato $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Una funzione $f(x):[a,b]\to$ è integrabile alla Riemann sull'intervallo $[a,b]$ se sussiste $\forall\varepsilon>0$:

$S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$ in corrispondenza di almeno una partizione P di $[a,b]$

Teorema Integrabilità Funzioni Continue

$C^0([a,b])\subset\mathcal{R}([a,b])$. Ossia: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f$ è integrabile alla Reimann

Dim: In base al TEO CANTOR una funzione limitata in un intervallo chiuso $[a,b]$ è uniformemente continua.

Fissato un $\varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0$ t.c. $|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ per ogni coppia di punti $x,x'\in[a,b]$ t.c. $|x-x'|<\delta$

Considero una partizione P di $[a,b]$. $P=(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n)$. Pongo $x_0=a$ e $x_n=b \Rightarrow P=(a,x_1,\dots,x_{n-1},b)$

Il valore assoluto di ogni intervallo di P è $<\delta$ per la definizione iniziale $|x_k-x_{k-1}|<\delta$.

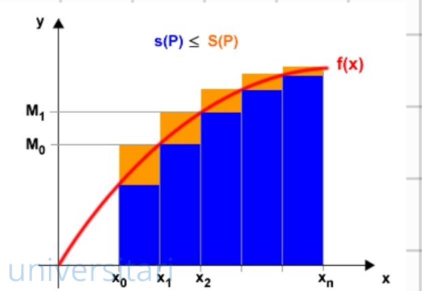
In ciascun intervallo x_k, x_{k-1} individuo un minimo m_k e un massimo M_k di $f(x)$, dove, per $k=1,\dots,n$ $\left\{\begin{array}{l} m_k=\inf\{f(x):x\in[x_k,x_{k-1}]\} \\ M_k=\sup\{f(x):x\in[x_k,x_{k-1}]\}\end{array}\right.$

Pertanto, la relazione tra due punti qualsiasi di $[a,b]$: $|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{b-a} \iff M_k-m_k<\frac{\varepsilon}{b-a}$

$\Rightarrow$ Moltiplico per x_k-x_{k-1} (base rettangolo) $\Rightarrow (M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})<\frac{\varepsilon}{b-a}(x_k-x_{k-1}) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})$ (calcolando sommando i rett. di P)

A sinistra ottengo $S(f,P)-s(f,P)<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})$. Ma $\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=(b-a)$. Ottengo $S(P)-s(P)<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)\Rightarrow S(P)-s(P)<\varepsilon$

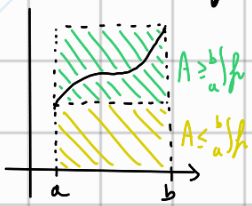
Ciò dimostra che ogni funzione continua in $[a,b]$ è integrabile alla Reimann ■



TEOREMA MEDIA INTEGRALE

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\in C^0([a,b])$. Allora $\exists c\in[a,b]$ t.c. $f(c)=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$

Dim:



$\underbrace{\inf f}_{\text{cost}} \leq f(x) \leq \underbrace{\sup f}_{\text{cost}}$. Dunque per il TEO CONFR. INT. $\int_a^b \inf f \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \sup f$.

Ricordo che $\int_a^b c = c\cdot(b-a) \Rightarrow \inf(f)\cdot(b-a) \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \leq \sup(f)\cdot(b-a)$

Ho che $\gamma=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f \in [\inf f, \sup f]=[\min f, \max f] \xRightarrow{\text{TEO VAL. INTERM.}} \exists c\in[a,b]$ t.c. $f(c)=\gamma=\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ ∎

TEOREMA FONDAMENTALE CALCOLO INTEGRALE

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e sia $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $F:[a,b]\to\mathbb{R}$. Allora F é derivabile e $F'(x)=f(x)$

Dim: Sia $x\in[a,b]$. Calcolo $\frac{(F(x+h)-F(x))}{h}=\frac{\int_a^{x+h} f-\int_a^x f}{h}=\frac{1}{h}\cdot\left[\int_a^x f+\int_x^{x+h} f-\int_a^x f\right]=\frac{1}{h}\cdot\int_x^{x+h} f$.

Per il TEO MEDIA INTEGR. $\exists c_{x,h}\in[x,x+h]$ t.c. $\int_x^{x+h} f=f(c_{x,h})\cdot(x+h-x)=f(c_{x,h})\cdot h \Rightarrow \frac{1}{h}\cdot(F(x+h)-F(x))=\frac{1}{h}\cdot\int_x^{x+h} f=\frac{1}{h}\cdot h\cdot f(c_{x,h})=f(c_{x,h})$

Se ho $h\to 0 \Rightarrow x \leq c_{x,h} \leq x+h$ Per il TEO CARAB. $f(c_{x,h})\to f(x)$. $\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x)) \xrightarrow{h\to 0} f(x)$ ∎