Lezione 12

12.1 Sfere nello spazio

In questa lezione studieremo alcuni dei più semplici oggetti geometrici "non lineari": circonferenze e sfere nello spazio S_3. Analizzeremo poi in dettaglio il caso delle circonferenze in un piano qualsiasi.

Definizione 12.1 (**Sfere**)**.** Siano fissati un punto $C \in S_3$ e un numero reale positivo $\varrho \in \mathbb{R}$.

Definiamo *sfera di centro C e raggio ϱ* il luogo $\mathcal{S}(C, \varrho)$ dei punti $P \in S_3$ a distanza fissata ϱ da C, ovvero tali che $d(P, C) = \varrho$.

Nella Figura 12.1 è illustrata una sfera di centro C e raggio ϱ.

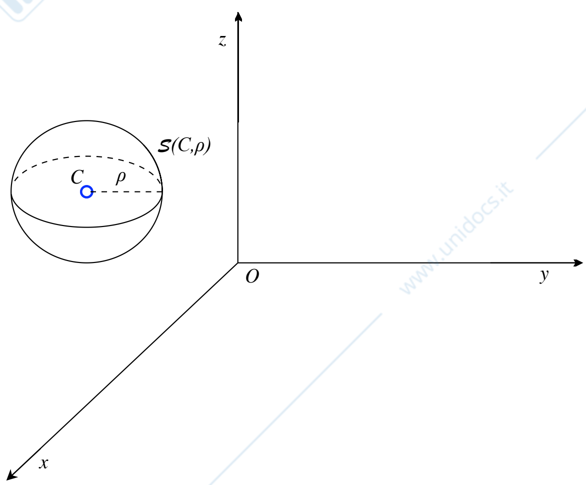

Figura 12.1

Fissiamo in S_3 un riferimento $Oxyz$ e analizziamo la condizione $d(P, C) = \varrho$: entrambe le quantità ai due membri sono positive, quindi essa è equivalente alla condizione $d(P, C)^2 = \varrho^2$. Se il punto C ha coordinate $C = (x_C, y_C, z_C) \in S_3$, dalla condizione $d(P, C)^2 = \varrho^2$ si ottiene l'equazione cartesiana della sfera nello spazio

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = \varrho^2.$$

Svolgendo i conti si trova l'*equazione cartesiana della sfera di centro* $C = (x_C, y_C, z_C)$ *e raggio* ϱ

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_C x - 2y_C y - 2z_C z + x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 - \varrho^2 = 0 : \tag{12.1.1}$$

ciò significa che

$$\mathcal{S}(C, \varrho) = \{ \ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - 2x_C x - 2y_C y - 2z_C z + x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 - \varrho^2 = 0 \ \}.$$

Osserviamo che, dal momento che siamo interessati al luogo dei punti che annullano l'equazione (12.1.1) e non all'equazione stessa, possiamo sostituire ad essa un qualsiasi suo multiplo non nullo: quindi, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ non nullo, abbiamo anche

$$\mathcal{S}(C, \varrho) = \{ \ (x, y, z) \mid \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2x_C x - 2y_C y - 2z_C z + x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 - \varrho^2) = 0 \ \}.$$

Esempio 12.2. La sfera di centro $C = (0, -2, 1)$ e raggio $\varrho = 1$ ha equazione

$$(x - 0)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 - 1 = x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 2z + 4 = 0.$$

Anche l'equazione

$$-2x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 8y + 4z - 8 = 0$$

è un'equazione della stessa sfera di centro $C = (0, -2, 1)$ e raggio $\varrho = 1$ ♠

L'equazione (12.1.1) ha due caratteristiche principali: la prima è che manca dei monomi "misti" (cioè in xy, xz, yz), la seconda è che i coefficienti dei termini quadratici sono non nulli ed uguali fra loro.

Viceversa, supponiamo di avere un'equazione di grado 2 con tali proprietà, quindi (a meno di dividere per il coefficiente comune dei termini quadratici) riconducibile alla forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 : \tag{12.1.2}$$

ci domandiamo se l'equazione (12.1.2) rappresenta una sfera e, in caso affermativo, come calcolare il suo centro ed il suo raggio.

Confrontando le equazioni (12.1.1) e (12.1.2), deduciamo che, affinché l'equazione (12.1.2) rappresenti una sfera, devono esistere $x_C, y_C, z_C \in \mathbb{R}$ e $\varrho \in \mathbb{R}$ positivo per cui valgono le relazioni

$$\alpha = -2x_C, \qquad \beta = -2y_C, \qquad \gamma = -2z_C, \qquad \delta = x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 - \varrho^2,$$

quindi

$$x_C = -\frac{\alpha}{2}, \qquad y_C = -\frac{\beta}{2}, \qquad z_C = -\frac{\gamma}{2}, \qquad 4\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4\delta.$$

Queste considerazioni dimostrano il seguente risultato.

Proposizione 12.3. *Sia fissato un sistema di riferimento $Oxyz$ in S_3. L'insieme*

$$\mathcal{S} = \{ \ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \ \}$$

è una sfera se e solo se $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4\delta > 0$.

Se ciò accade, risulta $\mathcal{S} = \mathcal{S}(C, \varrho)$ *con*

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}, -\frac{\gamma}{2}\right), \qquad \varrho = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4\delta}}{2}.$$

⚠ Qualora valga la condizione $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4\delta < 0$ per l'equazione (12.1.2), si dice che essa rappresenta una *sfera immaginaria* (o, anche, una *sfera di raggio immaginario o a punti immaginari*)

Invece, quando vale la condizione $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4\delta = 0$ la sfera si riduce ad un solo punto: in tal caso si dice che essa rappresenta una *sfera degenere*.

Esempio 12.4. Si consideri l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 2y + 1 = 0.$$

Poiché $3^2 + (-2)^2 + 0^2 - 4 \cdot 1 = 9 > 0$, essa è l'equazione di una sfera S in S_3. Il suo centro è $C = (-3/2, 1, 0)$, il suo raggio $\varrho = 3/2$.

Invece l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 2y + 4 = 0$$

non rappresenta una sfera nel senso della Definizione 12.1, ma una sfera immaginaria: infatti $3^2 + (-2)^2 + 0^2 - 4 \cdot 4 = -3 < 0$. ♠

12.2 Circonferenze nello spazio

Definizione 12.5 (Circonferenze). Siano fissati un piano $\pi \subseteq S_3$, un punto $C \in \pi$ e un numero reale positivo $\varrho \in \mathbb{R}$.

Definiamo *circonferenza* $\mathcal{C}(\pi, C, \varrho)$ *del piano* π*, di centro* C *e raggio* ϱ il luogo dei punti $P \in \pi$ a distanza fissata ϱ da C, ovvero tali che $d(P, C) = \varrho$.

Per rappresentare la circonferenza $\mathcal{C}(\pi, C, \varrho)$ ci possono essere vari modi. Il più comodo è quello di pensarla come intersezione del piano π con $\mathcal{S}(C, \varrho)$: se π ha equazione

$$ax + by + cz = d$$

e $C = (x_C, y_C, z_C)$, otteniamo le equazioni cartesiane per $\mathcal{C}(\pi, C, \varrho)$:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = \varrho^2. \end{cases} \tag{12.2.1}$$

Nella figura 12.2 è illustrata una circonferenza come intersezione del piano π con la sfera $\mathcal{S}(C, \varrho)$.

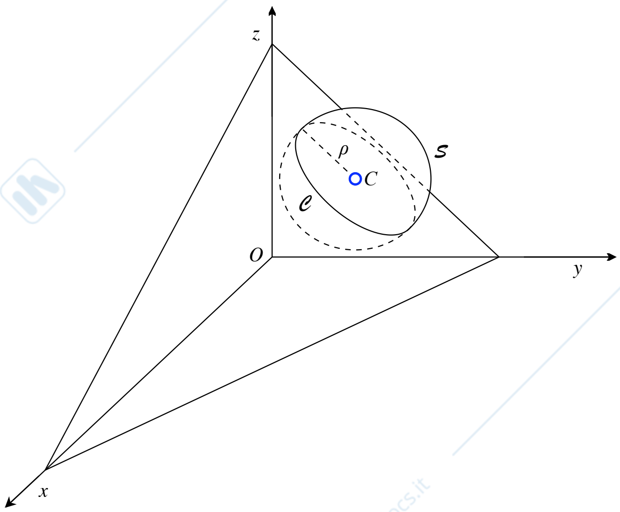

Figura 12.2

Esempio 12.6. Nel piano π di equazione $x + y + z = 3$ sia $C = (1, 1, 1)$: la circonferenza del piano π di centro C e raggio $\varrho = 1$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

♠

Come abbiamo fatto nel caso della sfera, ci poniamo ora il problema inverso a quello della rappresentazione: dato un sistema della forma

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0, \end{cases} \tag{12.2.2}$$

ci domandiamo se esso rappresenta una circonferenza e, in caso affermativo, come calcolare il suo centro ed il suo raggio (il piano d'appartenenza è, evidentemente, quello d'equazione $ax + by + cz = d$).

Affinché il sistema (12.2.2) rappresenti una circonferenza è innanzi tutto necessario che l'equazione $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta = 0$ rappresenti una sfera $\mathcal{S}(C, \varrho)$. Se ciò accade, allora occorre e basta che il piano π di equazione $ax + by + cz = d$ e la sfera $\mathcal{S}(C, \varrho)$ abbiano punti in comune: ciò accade se e solo se C ha distanza da α minore di ϱ.

Sia ora $\mathcal{C} = \pi \cap \mathcal{S}(C, \varrho)$: come si può osservare in Figura 12.3, il centro della circonferenza $\mathcal{C}$ è la proiezione ortogonale C' sul piano π, mentre il raggio ϱ' di $\mathcal{C}$ soddisfa la relazione $\varrho^2 = \varrho'^2 + d(\pi, C)^2$, da cui si deduce

$$\varrho' = \sqrt{\varrho^2 - d(\pi, C)^2}. \tag{12.2.3}$$

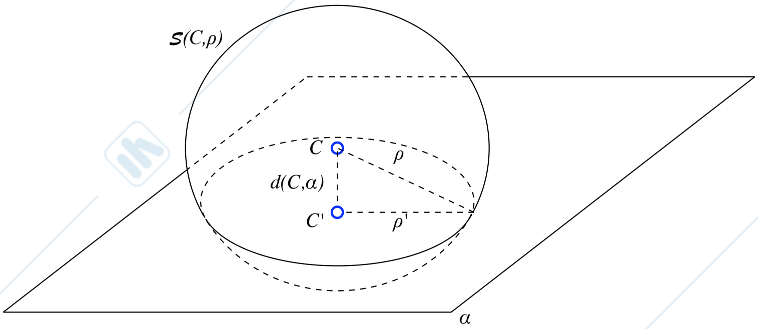

Figura 12.3

Se, invece, $d(C, \pi) > \varrho$, allora il sistema (12.2.2) non ha soluzioni, cioè $\pi \cap \mathcal{S}(C, \varrho) = \emptyset$. È questo il caso illustrato in Figura 12.4.

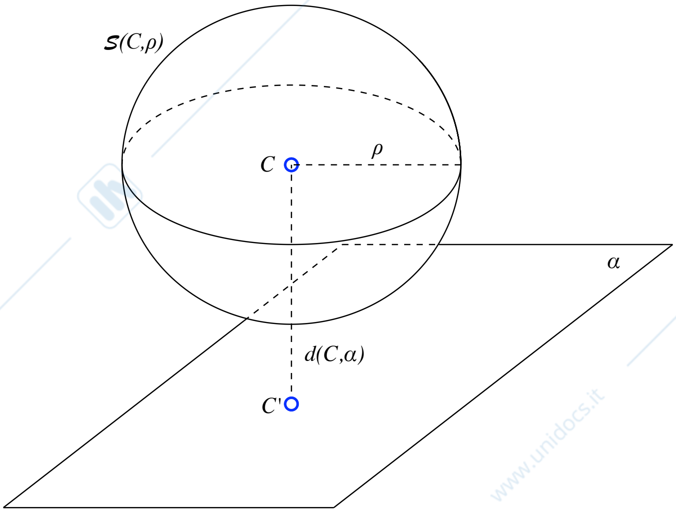

Figura 12.4

Esempio 12.7. Si consideri la famiglia di piani π_h di equazione $x + y + z = 1 + h$, $h \in \mathbb{R}$. Sia $\mathcal{S}$ la sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0.$$

Vogliamo individuare i valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che $\mathcal{S} \cap \pi_h$ sia una circonferenza. A tale scopo osserviamo che $\mathcal{S}$ ha centro nel punto $C = (1, 1, 1)$ e raggio $\varrho = 2$. Poiché

$$d(C, \pi_h) = \frac{|2 - h|}{\sqrt{3}},$$

segue che $\mathcal{S} \cap \pi_h$ è una circonferenza se e solo se $|2 - h| < 2\sqrt{3}$: svolgendo i calcoli ciò significa che $\mathcal{S} \cap \pi_h$ è una circonferenza se e solo se $h \in]2 - 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3}[$.

Siano C_h e ϱ_h rispettivamente il centro e il raggio di questa circonferenza, di modo che $\mathcal{C}(\pi_h, C_h, \varrho_h) = \mathcal{S} \cap \pi_h$. Per determinare ϱ_h utilizziamo la formula (12.2.3), ottenendo

$$\varrho_h = \sqrt{2^2 - \frac{(2-h)^2}{3}} = \sqrt{\frac{8+4h-h^2}{3}}.$$

Per quanto riguarda il calcolo delle coordinate del centro C_h, si noti che la retta u per C e perpendicolare a π_h ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dunque

$$C_h = u \cap \pi_h = \left(\frac{1+h}{3}, \frac{1+h}{3}, \frac{1+h}{3}\right). \qquad \spadesuit$$

Analizziamo adesso il caso in cui la distanza del centro della circonferenza dal piano è uguale al raggio della circonferenza, cioè $d(C,\pi) = \varrho$: l'intersezione $\pi \cap \mathcal{S}(C,\varrho)$ si riduce ad un solo punto P_0. Se $\alpha \neq \pi$ è un piano diverso da π che passa per P_0,, allora α non è perpendicolare a $P_0 - C$. Se chiamiamo C' la proiezione ortogonale di C su α allora l'intersezione $\alpha \cap \mathcal{S}(C,\varrho)$ è a sua volta una circonferenza di centro C' e raggio $|P_0 - C|$, quindi contiene infiniti punti. Concludiamo che π è l'unico piano passante per P_0 e perpendicolare a $P_0 - C$. Questo caso è illustrato in Figura 12.5.

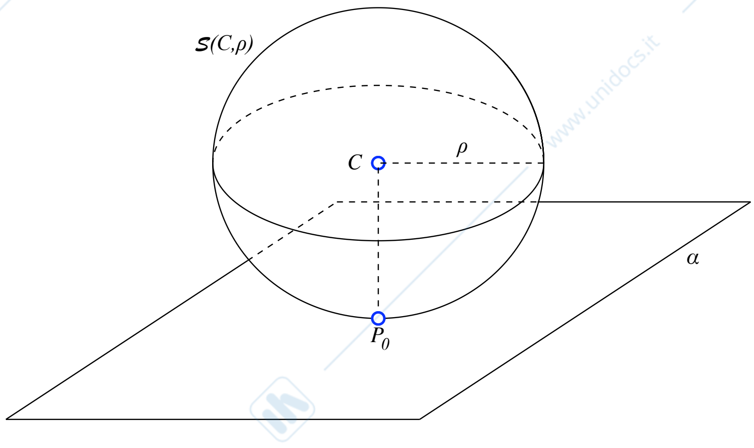

Figura 12.5

Definizione 12.8 (Piano e retta tangenti a una sfera). Si considerino la sfera $\mathcal{S}(C, \varrho) \subseteq S_3$ e un suo punto $P_0 \in \mathcal{S}(C, \varrho)$:

- si definisce *piano tangente a* $\mathcal{S}(C, \varrho)$ *nel punto* P_0 l'unico piano passante per P_0 e perpendicolare a $P_0 - C$;
- una *retta tangente a* $\mathcal{S}(C, \varrho)$ *in* P_0 è una qualsiasi retta passante per P_0 e contenuta nel piano tangente a $\mathcal{S}(C, \varrho)$ nel punto P_0.

Si noti che il piano tangente è lo stesso per tutte le sfere passanti per il punto P_0 ed aventi centro sulla retta per P_0 e C: infatti il centro di tali sfere ha coordinate

$$(x_0 + t(x_C - x_0), y_0 + t(y_C - y_0), z_0 + t(z_C - z_0))$$

per un opportuno $t \in \mathbb{R}$ non nullo, dunque il piano tangente in P_0 ha in tal caso equazione

$$t(x_0 - x_C)(x - x_0) + t(y_0 - y_C)(y - y_0) + t(z_0 - z_C)(z - z_0) = 0,$$

cioè, semplificando t,

$$(x_0 - x_C)(x - x_0) + (y_0 - y_C)(y - y_0) + (z_0 - z_C)(z - z_0) = 0. \tag{12.2.4}$$

Sia ora $\mathcal{C}$ una circonferenza che giace su un piano π: è immediato verificare che i piani tangenti in P_0 alle sfere $\mathcal{S}$ contenenti $\mathcal{C}$ passano tutti per una stessa retta $r \subseteq \pi$. Tale retta interseca $\mathcal{C}$ solo in P_0 ed ha la proprietà di essere perpendicolare al vettore $P_0 - C'$, ove $C' \in \pi$ è il centro di $\mathcal{C}$.

Esempio 12.9. Siano $C = (1, 1, 1)$ e $\varrho = \sqrt{3}$. La sfera $\mathcal{S}(C, \varrho) \subseteq S_3$ ha equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$$

e contiene il punto $P_0 = (2, 2, 2)$. Il piano tangente a $\mathcal{S}(C, \varrho)$ in P_0 ha equazione

$$(2 - 1)(x - 2) + (2 - 1)(y - 2) + (2 - 1)(z - 2) = 0,$$

che, una volta semplificata, diventa $x + y + z = 6$.

La retta

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + \ell t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

è tangente a $\mathcal{S}(C, \varrho)$ in P_0 se e solo se $\ell = 1$. ♠

Osservazione 12.10. Un caso interessante di circonferenze sono quelle contenute nel piano xy, cioè quelle le cui equazioni cartesiane sono della forma

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0. \end{cases}$$

Il sistema sopra è equivalente a

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \delta = 0, \end{cases}$$

che rappresenta la circonferenza data come intersezione del piano xy con un cilindro circolare avente asse perpendicolare a tale piano. Spesso si parla allora della *circonferenza nel piano di equazione*

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \delta = 0.$$

La trattazione che abbiamo appena visto continua a valere, con le dovute modifiche, per le circonferenze nel piano xy (calcolo del centro e del raggio, circonferenze immaginarie, calcolo della retta tangente, etc.).

12.3 Intersezione di due sfere

Vogliamo adesso considerare l'intersezione di due sfere in S_3, diciamo $\mathcal{S}(C_1, \varrho_1)$ e $\mathcal{S}(C_2, \varrho_2)$: la struttura di tale intersezione $\mathcal{S}(C_1, \varrho_1) \cap \mathcal{S}(C_2, \varrho_2)$ è legata strettamente alla distanza $d(C_1, C_2)$. Più in dettaglio, si possono verificare tre casi principali.

1. Nel primo caso, illustrato in Figura 12.6, la distanza $d(C_1, C_2) > \varrho_1 + \varrho_2$ oppure $d(C_1, C_2) < |\varrho_1 - \varrho_2|$: le due sfere non possono avere punti in comune e sono, rispettivamente, esterne o interne l'una all'altra.

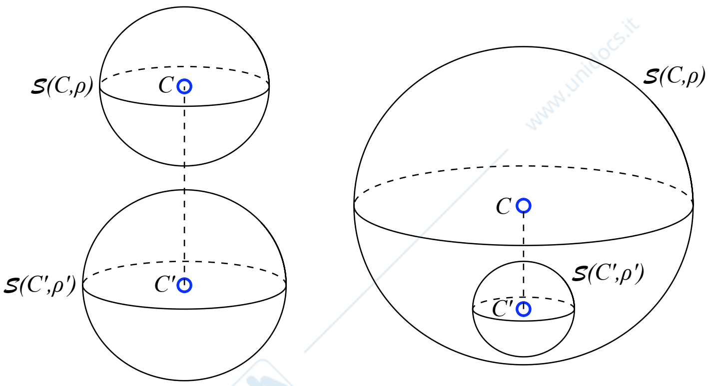

Figura 12.6

2. Nel secondo caso, illustrato in Figura 12.7, la distanza $d(C_1, C_2) = \varrho_1 + \varrho_2$ oppure $d(C_1, C_2) = |\varrho_1 - \varrho_2|$: le due sfere hanno esattamente un punto in comune. Si dicono *tangenti*, rispettivamente, esternamente o internamente.

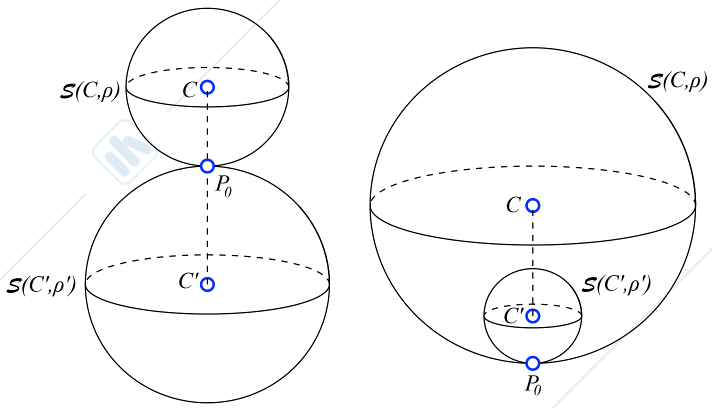

Figura 12.7

3. Nel terzo caso, illustrato in Figura 12.8, $|\varrho_1 - \varrho_2| < d(C_1, C_2) < \varrho_1 + \varrho_2$: in questo caso le due sfere hanno punti in comune. Tali punti descrivono una circonferenza $\mathcal{C}$ avente centro sulla retta che unisce i punti C_1 e C_2.

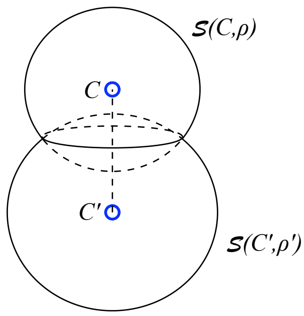

Figura 12.8

Concentriamoci sul terzo caso: vogliamo determinarne equazioni cartesiane per la circonferenza data dall'intersezione delle due sfere $\mathcal{S}(C_1, \varrho_1)$ e $\mathcal{S}(C_2, \varrho_2)$. Si osservi preliminarmente che $C_1 \neq C_2$, cioè le due sfere non sono concentriche. Se le equazioni delle due sfere sono rispettivamente

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 &= 0 \qquad (12.3.1)\\
x^2 + y^2 + z^2 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 &= 0,
\end{aligned}
$$

allora tale condizione si traduce nella disuguaglianza $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \neq (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.

Le coordinate dei punti di $\mathcal{C}$ soddisfano le due equazioni di $\mathcal{S}(C_1, \varrho_1)$ e $\mathcal{S}(C_2, \varrho_2)$, dunque soddisfano anche l'equazione ottenuta sottraendo membro a membro le due equazioni (12.3.1). Quindi le coordinate dei punti di $\mathcal{C}$ soddisfano anche l'equazione di primo grado

$$(\alpha_1 - \alpha_2)x + (\beta_1 - \beta_2)y + (\gamma_1 - \gamma_2)z + (\delta_1 - \delta_2) = 0 :$$

poiché $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \neq (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ tale equazione rappresenta, nello spazio S_3, un piano π che contiene $\mathcal{C}$. Dunque possiamo scrivere $\mathcal{C} = \pi \cap \mathcal{S}(C_i, \varrho_i)$. Si noti che il piano π è perpendicolare a

$$C_1 - C_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)\vec{\imath} + (\beta_1 - \beta_2)\vec{\jmath} + (\gamma_1 - \gamma_2)\vec{k} \neq \vec{0}.$$

Definizione 12.11 (**Piano radicale**)**.** Date le due sfere $\mathcal{S}_1$ ed $\mathcal{S}_2$ non concentriche, descritte rispettivamente dalle equazioni (12.3.1), il piano di equazione

$$(\alpha_1 - \alpha_2)x + (\beta_1 - \beta_2)y + (\gamma_1 - \gamma_2)z + (\delta_1 - \delta_2) = 0$$

è detto *piano radicale della coppia di sfere* $\mathcal{S}_1$ *ed* $\mathcal{S}_2$.

Osservazione 12.12. Se una delle due sfere è degenere (cioè è un punto), ad esempio $\mathcal{S}_1 = \{P_0\}$ e si ha che $P_0 \in \mathcal{S}_2$, allora è facile vedere che il piano radicale coincide con il piano tangente alla sfera $\mathcal{S}_2$ nel punto P_0.

Esempio 12.13. Si considerino le due sfere $\mathcal{S}_1$ ed $\mathcal{S}_2$ rispettivamente di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + 5 = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z + 5 = 0.$$

Il centro di $\mathcal{S}_1$ è $C_1 = (1, 1, -2)$ e quello di $\mathcal{S}_2$ è $C_2 = (-1, -1, 2)$, quindi la distanza $d(C_1, C_2) = \sqrt{24}$. Poiché e $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$ si deduce che $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$: di più, le sfere sono esterne l'una all'altra. ♠

Esempio 12.14. Si considerino le due sfere $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ rispettivamente di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 4 = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0.$$

Il centro di $\mathcal{S}_1$ è $C_1 = (1, 0, 2)$, mentre il centro di $\mathcal{S}_2$ è $C_2 = (1, 1, 1)$, quindi $d(C_1, C_2) = \sqrt{2}$. Per quanto riguarda i raggi, abbiamo $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$. Concludiamo che $\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ è una circonferenza: calcoliamone centro e raggio.

A tale scopo osserviamo prima che il piano radicale π, che contiene $\mathcal{C}$, ha equazione

$$y - z + 1 = 0.$$

La retta passante per C_1 e C_2 ha equazioni

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Concludiamo che il centro di $\mathcal{C}$ è $C = (1, 1/2, 3/2)$. Per quanto riguarda il raggio ϱ, poiché $d(C_1, \pi) = 1/\sqrt{2}$, segue che

$$\varrho = \sqrt{\varrho_1^2 - d(C_1, \pi)^2} = 1/\sqrt{2}.$$ ♠

Quanto visto sopra circa l'intersezione di due sfere può essere utile per la determinazione di sfere che soddisfino certe proprietà come, per esempio, contenere una circonferenza data o essere tangenti ad un piano dato.

Esempio 12.15. Si consideri la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 7 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

Una sfera contenente $\mathcal{C}$ è perciò $\mathcal{S}_1$ di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 7 = 0.$$

Per quanto osservato sopra, ogni altra sfera $\mathcal{S}$ contenente $\mathcal{C}$ deve avere un'equazione della forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

tale che

$$(x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) - (x^2 + y^2 + z^2 - 7) = \lambda(x + y + z - 3),$$

cioè

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = x^2 + y^2 + z^2 - 7 + \lambda(x + y + z - 3)$$

per un'opportuno $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se, per esempio, vogliamo determinare la sfera contenente $\mathcal{C}$ e passante per il punto $P_0 = (1, 0, 0)$ dobbiamo scegliere λ tale che

$$1^2 + 0^2 + 0^2 - 7 + \lambda(1 + 0 + 0 - 3) = 0,$$

ovvero $\lambda = -3$. Pertanto la sfera cercata ha equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 2 = 0.$$ ♠

Esempio 12.16. Si consideri il piano π di equazione

$$x + y + z - 3 = 0$$

e sia $P_0 = (1, 1, 1)$: si noti che $P_0 \in \pi$. Vogliamo determinare le sfere tangenti a π in P_0. Per fare ciò possiamo procedere in due modi.

Il primo consiste nel pensare il punto P_0 come una sfera degenere, di equazione

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 0.$$

Dal momento che una sfera $\mathcal{S}$ è tangente a π in P_0 se e solo se $\mathcal{S} \cap \pi = \{P_0\}$, una tale sfera sarà necessariamente caratterizzata dalla condizione che π sia il piano radicale tra essa e la sfera degenere $\{P_0\}$, e quindi avrà equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

tale che

$$(x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)-((x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2)=\lambda(x+y+z-3),$$

cioè

$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\lambda(x+y+z-3)$$

per un'opportuno $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se, per esempio, vogliamo determinare la sfera tangente a π in P_0 e passante per $P_1=(1,0,0)$ dobbiamo scegliere λ tale che

$$0^2+(-1)^2+(-1)^2-2\lambda(1+0+0-3)=0,$$

ovvero $\lambda = 1$. Pertanto la sfera cercata ha equazione

$$x^2+y^2+z^2-x-y-z=0.$$

Il secondo metodo consiste nell'osservare che ogni sfera tangente a π in P_0 ha centro in un punto della retta per P_0 perpendicolare a π, cioè in un punto C_t avente coordinate $(1+t, 1+t, 1+t)$, quindi ha equazione della forma

$$x^2+y^2+z^2-2(1+t)x-2(1+t)y-2(1+t)z+3+6t+t^2-\varrho^2=0.$$

Poiché P_0 appartiene a tale sfera, si ha necessariamente $t^2=\varrho^2$. A questo punto si osserva facilmente che tale equazione si può anche scrivere come

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\lambda(x+y+z-3)=0$$

con $\lambda=-2t \in \mathbb{R}$, cioè la stessa equazione calcolata col primo metodo. ♠