

Quiz 4. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ tale che $f^{-1}(1, 2) = (k + 1, 3 - k)$, $k \in \mathbb{R}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- $(1, 3) \in \ker(f)$.
- $\text{im}(f) = \mathcal{L}((1, 3))$.
- f è un isomorfismo.
- $(1, -1) \in \ker(f)$.

Svolgimento. Ricordo che $2 = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f))$.

L'affermazione a) è falsa. Infatti se fosse $(1, 3) \in \ker(f)$ si avrebbe $f(1, 3) = (0, 0)$. D'altra parte $(1, 3) \in f^{-1}(1, 2)$ (si prenda $k = 0$), dunque $f(1, 3) = (1, 2)$.

L'affermazione b) è falsa. Infatti $(1, 3), (2, 2) \in f^{-1}(1, 2)$ (si prenda $k = 0, 1$ rispettivamente), dunque $(0, 0) = (1, 2) - (1, 2) = f(2, 2) - f(1, 3) = f((2, 2) - (1, 3)) = f(1, -1)$. Perciò $\ker(f) \neq \{0\}$, sicché $\dim(\text{im}(f)) \leq 1$. Poiché $(1, 2) \in \text{im}(f)$ si ha $\text{im}(f) = \mathcal{L}((1, 2))$ e si vede che $(1, 3) \notin \mathcal{L}((1, 2))$.

L'affermazione c) è falsa. Infatti se f fosse un isomorfismo sarebbe iniettiva, dunque dovrebbe essere $f(2, 2) \neq f(1, 3)$, mentre, invece, $f(2, 2) = f(1, 3) = (1, 2)$.

L'affermazione d) è vera. Infatti si è osservato sopra che $\mathcal{L}((1, -1)) \subseteq \ker(f)$ e che $\dim(\text{im}(f)) = 1$, quindi $\dim(\ker(f)) = 1$ e, perciò, deve valere l'uguaglianza.

Quiz 5. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ tale che

$$f(1, 1, 1) = f(0, 1, 2) = f(h, 2, 3) = (0, 0, 0).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- f è l'endomorfismo nullo per ogni $h \in \mathbb{R}$.
- f è univocamente determinato.
- Se $h \neq 1$ esistono infiniti endomorfismi che soddisfano le condizioni di cui sopra.
- Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

Svolgimento. Si ponga

$$a := (1, 1, 1), \quad b := (0, 1, 2), \quad c_h := (h, 2, 3).$$

Notiamo che $c_1 = a + b$. Invece, se $h \neq 1$, i vettori a, b, c_h sono linearmente indipendenti, quindi (a, b, c_h) è una base di V in questi casi.

L'affermazione a) è falsa. Infatti $a + b = c_1$. $\mathcal{C} := (a, b, c_1)$ è base di \mathbb{R}^3 : allora si può dimostrare che esiste ed è unico un endomorfismo f tale che $f(a) = f(b) = 0$ (e, dunque, $f(c_1) = f(a + b) = 0$) ed $f(c_2) \neq 0$. Allora f soddisfa le condizioni ma non è identicamente nullo.

L'affermazione b) è falsa. Infatti non è verificata, come mostrato sopra, nel caso $h = 1$ (e solo in questo), in quanto f è univocamente individuato dall'immagine di e_3 che può essere scelta arbitrariamente.

L'affermazione c) è falsa. Infatti se $h \neq 1$ (a, b, c_h) è una base di V , dunque f è univocamente individuata dalla sua azione su a, b, c_h (ed è l'endomorfismo nullo).

Per esclusione l'affermazione d) è vera.

Quiz 6. Si consideri

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \rightarrow (x + y - z, -x - y + z).$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- $\ker(f)$ contiene il solo vettore nullo.
- $\ker(f) = \mathcal{L}((1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1))$.
- $\ker(f)$ ha come base $((1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1))$.
- $\ker(f) = \mathcal{L}((1, 1, 2), (0, 1, 1))$.