Svolgimento. Osserviamo preliminarmente che $((1,1,0),(1,0,1))$ è una base di V, $((1,1,1))$ una di W.

L'affermazione a) è falsa. Infatti dalla teoria generale è noto che l'intersezione di due sottospazi è ancora un sottospazio, dunque è non vuoto.

L'affermazione b) è falsa. Infatti $(1,1,0)+(1,1,1)=(1,2,2)\notin V,W$, dunque non è nemmeno in $V\cup W$.

L'affermazione c) è falsa. Infatti

$$\dim(V+W)=\dim(\mathcal{L}((1,1,0),(1,0,1),(1,1,1))=3.$$

L'affermazione d) è vera. Infatti $\dim(V+W)=3$, $\dim(V)=2$, $\dim(W)=1$.

Quiz 6. Sia

$$A:=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

a) A non è invertibile.

b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

d) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

Svolgimento. Ricordo che una matrice quadrata A di ordine n si dice invertibile se esiste una matrice B tale che $AB=BA$ è la matrice identità di ordine n. Tale matrice B, se esiste, è unica, viene normalmente indicata con A^{-1} e viene detta la matrice inversa di A.

L'affermazione a) è falsa. Infatti è noto dalla teoria che una matrice è invertibile se e solo se ha rango massimo. Poiché A è ridotta per righe è facile verificare che $\varrho(A)=3$, dunque A è necessariamente invertibile.

L'affermazione b) è falsa. Infatti

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

L'affermazione c) è vera. Infatti

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

L'affermazione d) è falsa. Infatti

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$