FUNZIONI CONTINUE

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ È CONTINUA SE $\forall x_0 \in D$, $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

· f^{-1} È CONTINUA SE f È CONTINUA E VICEVERSA

SITUAZIONI DISCONTINUITÀ

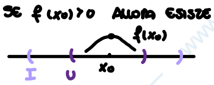
· $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

· $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ MA È DIVERSO DA $f(x_0)$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, CONTINUA IN x_0

SE $f(x_0) > 0$ ALLORA ESISTE UN INTERVALLO $U \subseteq I$ TALE CHE $f(x) > 0$ $\forall x \in U$



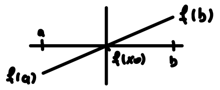
CONTROESEMPIO: TOLGO L'IPOTESI DI CONTINUITÀ

$\Rightarrow$ NON ESISTE UN INTORNO CONTENENTE x_0 STRETTAMENTE POSITIVO $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

TEOREMA DEGLI ZERI

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, CONTINUA IN $[a,b]$, $a \neq b$

SE $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ ALLORA $\exists x_0 \in [a,b]$ TALE CHE $f(x_0) = 0$ $\Rightarrow$ IL TEOREMA NON MI DICE QUANTE VOLTE SI ANNULLA



$\Rightarrow f(a) \cdot f(b) \leq 0$

ESEMPIO: $f(x)$ = POLINOMIO GRADO DISPARI

$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ CON m DISPARI E $a_k \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_m x^m$ CON $a_m > 0$

$x^m \nearrow +\infty$ ($x \to +\infty$), $\searrow -\infty$ ($x \to -\infty$)

$\Rightarrow$ ESISTE ALMENO UNO ZERO DI $f(x)$ (LO ZERO È UN NUMERO REALE)

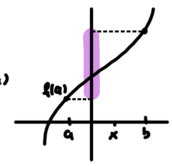
TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, CONTINUA IN $[a,b]$

ALLORA $Im\, f \supseteq [f(a), f(b)]$ SE $f(a) \leq f(b)$ O $Im\, f \supseteq [f(b), f(a)]$ SE $f(b) \leq f(a)$

$\Rightarrow f$ ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI TRA $f(a)$ E $f(b)$

CONTROESEMPIO: $f(x) \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ DISCONTINUA

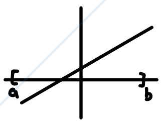


TEOREMA DI WEIERSTRASS

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f CONTINUA IN $[a,b]$

ALLORA f AMMETTE MASSIMO E MINIMO

CONTROESEMPIO: SE $[a,b]$ DIVENTA (a,b)



ES: $f(x) = \frac{1}{x}$ $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ È CONTINUA MA NON AMMETTE MASSIMO

OSSERVAZIONE: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA, ALLORA f È LIMITATA: $\exists\, m, M$ TALE CHE $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$

$m = f(x_0)$, x_0 È IL MINIMO DI f

$M = f(z_0)$, z_0 È IL MASSIMO DI f

$\Rightarrow Im(f) \subseteq [m, M]$ CON $m, M \in \mathbb{R}$

DEFINIZIONE FUNZIONE LIMITATA

Derivate

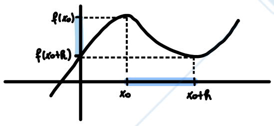
Si dice derivabile in x0, se esiste ed é finito il limite del rapporto incrementale per h che converge a zero. Il valore del limite é la derivata di f

PRENDIAMO $f: I \to \mathbb{R}$, CONTINUA

VOGLIO "QUANTIFICARE" QUANTO VELOCEMENTE CAMBIA f RISPETTO A VARIAZIONI DELLA VARIABILE x

RAPPORTO INCREMENTALE IN $x_0 \in I$

↳ $R(f, x_0, h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

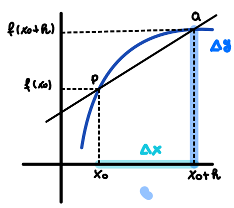


OSSERVAZIONE:

· f È CRESCENTE SE E SOLO SE $R \geq 0$ $\forall x_0$, $\forall h \neq 0$

· f È DECRESCENTE SE E SOLO SE $R \leq 0$ $\forall x_0$, $\forall h \neq 0$

RAPPORTO INCREMENTALE FUNZIONE QUALSIASI



RETTA PQ: $y = R(f, x_0, h) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

↓

COEFF. ANGOLARE

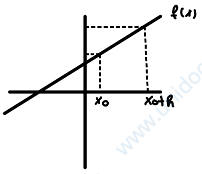
↓

NOTAZIONE: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

↳ L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE SARÀ $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

↳ FRA TUTTE LE APPROSSIMAZIONI QUESTA È LA MIGLIORE

ESEMPIO $f(x) = mx + q$

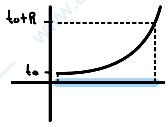


$$R(f, x_0, h) = \frac{m(x_0+h) - m x_0}{h} = m$$

=> X UNA RETTA, IL RAPPORTO INCREMENTALE È COSTANTE ED UGUALE AL COEFF. ANGOLARE

ESEMPIO

$S(t)$ = km PERCORSI AL TEMPO t



$R(S, t_0, h)$ = VELOCITÀ MEDIA NEL TEMPO $[t_0, t_0+h]$

ESEMPIO $N: [0,T] \to R$

↳ VARIABILE TEMPO DI UNA POPOLAZIONE CHE CRESCE

α : $\frac{\text{NUMERO NATI}}{\text{NUMERO INDIVIDUI}}$

β : $\frac{\text{NUMERO MORTI}}{\text{NUMERO INDIVIDUI}}$

⟶ α, β SONO COSTANTI NEL TEMPO => $N(t+h) = N(t) + \alpha \cdot h \cdot N(t) - \beta \cdot h \cdot N(t)$

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = (\alpha - \beta) \cdot N(t)$$

↓

k = TASSO CRESCITA ISTANTANEO ⟶ $k = \frac{N'(t)}{N(t)}$

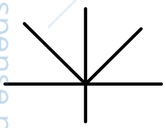
FACCIO IL LIMITE PER $h \to 0$

$N'(t) = (\alpha - \beta) \cdot N(t)$

OSSERVAZIONE SULLA DEFINIZIONE

=> L'ESISTENZA DEL LIMITE IMPLICA CHE $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

ESEMPIO: $f(x) = |x| : \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$



$$\lim_{h \to 0^+} R(0, |x|, h) = \frac{|h| - 0}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} R(0, |x|, h) = \frac{|h| - 0}{h} = -1$$

=> $\lim_{h \to 0^+} R(0,|x|,h) \neq \lim_{h \to 0^+} R(0,|x|,h)$ => LA FUNZIONE NON È DERIVABILE IN $x = 0$

SE D_f = INSIEME DEI PUNTI DI DIFFERENZIABILITÀ DI f, CHIARAMENTE $D_f \subset D$ = DOMINIO f ⟶ ABBIAMO DEFINITO UNA NUOVA FUNZIONE: $f': D_f \subset D \to R$

↳ ES: PER LA FUNZIONE $|x|$, $\left.\begin{matrix} D = R \\ D_f = R - \{0\} \end{matrix}\right] D_f \subset D$

OSSERVAZIONE: $f: [a;b] \to R$

=> DICIAMO CHE f È DERIVABILE IN a SE ESISTE ED È FINITO IL $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

=> DICIAMO CHE f È DERIVABILE IN b SE ESISTE ED È FINITO IL $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

⟶ **ESEMPIO**: $f(x) = x \cdot e^{\sqrt{x}}$, DOM $f = [0; +\infty)$

CONTROLLO LA DERIVABILITÀ IN $x = 0$: $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1$ => È DERIVABILE

⟶ **ESEMPIO** $= \sqrt[3]{(1-x)}$ $x_0 = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -\infty$ => SEGUE CHE f NON È DERIVABILE

TIPI DI DERIVATE

- $f(x) = c,\ c \in R$ ⟶ $f'(x) = 0$
- $f(x) = mx + q$ ⟶ $f'(x) = m$
- $f(x) = x^m$ ⟶ $f'(x) = m \cdot x^{m-1}$ ES: x^3 => $3x^2$
- $f(x) = e^x$ ⟶ $f'(x) = e^x$
- $f(x) = a^x$ ⟶ $f'(x) = a^x \cdot \ln a$
- $f(x) = \ln x$ ⟶ $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \log_a b$ ⟶ $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ # $b = e^{\ln b}$ => $\log_a e^{\ln b} = \ln b \cdot \log_a e \xrightarrow{\text{DERIVATA}} \frac{1}{b} \cdot \log_a e$
- $f(x) = \sin x$ ⟶ $f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$ ⟶ $f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x$ ⟶ $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

REGOLE DI CALCOLO

- PRODOTTO X UNA COSTANTE : $(\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)$
- SOMMA : $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- PRODOTTO : $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
- QUOZIENTE : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
- FUNZIONE INVERSA : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

TEOREMA

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DERIVABILE IN x_0 => ALLORA f CONTINUA IN x_0

DIMOSTRAZIONE => VOGLIO MOSTRARE CHE $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

- $f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot (x - x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot (x - x_0)$$

=> f DERIVABILE IN x_0 = $f(x_0)$

TEOREMA

-> f CONTINUA IN x_0 E DERIVABILE IN $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ SE $\lim_{x \to x_0^+} f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x_0) = c \in \mathbb{R}$

-> ALLORA f DERIVABILE IN x_0 E $f'(x_0) = c$

$D = (a, b)$ — a, x_0, b

* ESEMPIO
$$\begin{cases} -x^2 + 1 & x < 0 \\ e^x - x & 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x+2} & x \geq 2 \end{cases}$$

$-x^2+1$)[$e^x + x$)[$\sqrt{x+2}$ — 0, 2

↳ È DERIVABILE? FACCIO DOMINIO + DERIVATA

↳ $\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

D: $x + 2 \neq 0$ => $x \neq -2$

→ $\lim_{x \to -2} \frac{1}{2\sqrt{0}} = \infty$

↳ LA FUNZIONE NON È DERIVABILE IN $x = -2$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

• PUNTO ANGOLOSO

f NON DERIVABILE IN x_0 MA
- $\exists \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ = FINITO
- $\exists \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ = FINITO

ES: $|x|$ => IN $x=0$ f NON È DERIVABILE

• CUSPIDE

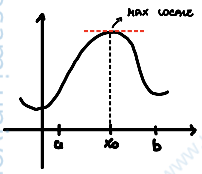
f NON DERIVABILE IN x_0 MA
- $\exists \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ = NON FINITO
- $\exists \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ = NON FINITO

ES: $|x|$ => IN $x=0$ f NON È DERIVABILE

TEOREMA DI FERMAT

- f È DEFINITA IN UN INTORNO DI x_0, $x_0 \in (a,b)$ E x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO/MINIMO RELATIVO PER f

=> SE f È DERIVABILE IN x_0 ALLORA $f'(x_0) = 0$



OSSERVAZIONI

- $\exists$ FUNZIONI IN CUI $f'(x) = 0$ MA x NON È MAX/MIN LOCALE ES: x^3 => SE $x=0$ $f'(3x^2) = 0$ MA $x=0$ NON È MAX/MI
  ↳ QUINDI $f'(x) = 0$ È CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE
  ↳ DEFINITO COME PUNTO CRITICO
- $\exists$ MASSIMI/MINIMI LOCALI DOVE f NON È DERIVABILE ES: $|x|$ => SE $x=0$ HO UN MINIMO ASSOLUTO MA NON È DERIVABILE
- CI SONO MINIMI/MASSIMI CHE NON SONO PUNTI INTERNI DEL DOMINIO DI f ES: $\sqrt{x}$ => SE $x=0$ HO UN MINIMO ASSOLUTO MA f' NON È DERIVABILE

COME TROVARE MAX/MIN LOCALE DI $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, CONTINUA

1° $\{x \in [a,b] : f'(x) = 0\}$

2° $\{x \in [a,b] : f$ NON È DERIVABILE IN $x\}$

3° $\{a, b\}$

⟶ COME CAPIRE SE UN PUNTO CRITICO È ANCHE PUNTO DI MAX/MIN

↳ DEVO STUDIARE LA MONOTONIA E IL SEGNO DELLA DERIVATA

↳ **TEOREMA**

-> DATA f DERIVABILE SU $(a;b)$

- SE $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$ ALLORA f È STRETTAMENTE CRESCENTE SU (a,b) ($x < z$ => $f(x) < f$
- SE $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$ ALLORA f È STRETTAMENTE DECRESCENTE SU (a,b) ($x < z$ => $f(x) > f$

OSSERVAZIONI

- NON VALE AL CONTRARIO ES: x^3 => STRETTAMENTE CRESCENTE MA $f'(3x^2) \geq 0$

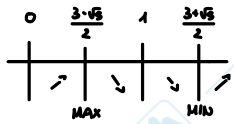
TEOREMA DEI PUNTI INTERNI DI MASSIMO E MINIMO

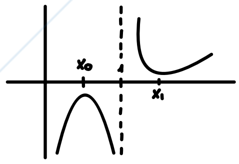
- $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, CONTINUA IN (a,b) E DERIVABILE IN $(a,x_0) \cup (x_0,b)$ CON $x_0 \in (a,b)$

$\Rightarrow$ SE $f'(x) > 0$ IN (a,x_0) e $f'(x) < 0$ IN (a,x_0) ALLORA x_0 È UN MASSIMO LOCALE
$\Rightarrow$ SE $f'(x) < 0$ IN (a,x_0) e $f'(x) > 0$ IN (x_0,b) ALLORA x_0 È UN MINIMO LOCALE
$\longrightarrow$ NON MI INTERESSA LA DERIVABILITÀ IN x_0

ESEMPIO: $f(x) = \log x + \frac{1}{x-1}$ DOM: $(0;1) \cup (1;+\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x-1)^2}$ $\Rightarrow$ CERCO LA CRESCENZA: $\frac{1}{x} - \frac{1}{(x-1)^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-3x+1}{x(x-1)^2} \geq 0 \Rightarrow \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) - \{1\}$

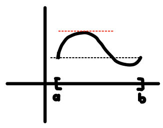




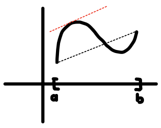
TEOREMA DI ROLL

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, CONTINUA E DERIVABILE SU $(a;b)$

$\Rightarrow$ SE $f(a) = f(b)$, $\exists\, c \in (a;b)$ TALE CHE $f'(c) = 0$



* SE TOLGO L'IPOTESI CHE $f(a) = f(b)$ ALLORA $\exists\, x_0 \in (a,b)$: $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



TEOREMA DEI VALORI MEDI

- f CONTINUA E DERIVABILE SU (a,b)

$\Rightarrow$ SE $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a;b) \Rightarrow f(x) = c$ $\forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow$ DATE f, g TALI CHE $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a;b) \Rightarrow f(x) = g(x) + c$ CON $c \in \mathbb{R}$ $\forall x \in (a,b)$

$\longrightarrow$ DATE DUE FUNZIONI CON LA STESSA DERIVATA, QUESTE COINCIDONO A MENO DI UNA COSTANTE

Lagrange

ESEMPIO ESERCIZIO:

$f(x) = \frac{x}{\ln(x^2+x)}$ $\Rightarrow$ TROVARE LA RETTA TANGENTE

$f'(x) = \frac{(x+1)\cdot \ln(x^2+x) - 2x - 1}{x \cdot \ln(x^2+x)^2 + \ln(x^2+x)^2}$

$x_0 = 1 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{\ln(3)} - \frac{2}{3\ln^2(3)}\right) \cdot (x-1) + \frac{1}{\ln(3)}$

$\hookrightarrow y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) - f(x_0)$

METODO DE L'HOPITAL $\longrightarrow$ TEOREMA

- SE f DERIVABILE IN (a,b) ALLORA $\exists\, x \in (a,b): f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- DATE $f(x_0) = g(x_0) = 0$ HO UNA F.I.

$\hookrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \frac{x-x_0}{g(x)-g(x_0)}$ CON $z, w \in (x_0, x)$

$\hookrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(w)}$ MA POSSO FARE MEGLIO $\forall x$ VICINO AD x_0 $\exists\, y \in (x_0, x)$ T.C. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}$

$\longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to +\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)}$

TEOREMA

- DATE f, g DUE FUNZIONI DERIVABILI IN $I = (x_0, b)$
- $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0$ * OPPURE ENTRAMBI $\pm\infty$

$\Rightarrow$ ALLORA SE ESISTE $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ SEGUE CHE $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ ESISTE ED È UGUALE A $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(y)}{g'(y)}$

· OSSERVAZIONI

- PER IL LIMITE DA SX, $I = (a, x_0)$
- PER IL LIMITE COMPLETO, $I = (a,x_0) \cup (x_0, b)$
- PER IL LIMITE $\lim_{x \to \pm\infty}$ $I = (a,+\infty) / (-\infty, b)$

DOVE NON VA USATO

- $\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\log x} = +\infty$ $\Rightarrow$ NON È UNA FORMA INDETERMINATA

$\hookrightarrow \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$ $\Rightarrow$ DE L'HOPITAL NON FUNZIONA

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1 + \frac{\sin x}{x} = 2$

$\hookrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ = NON ESISTE

SVILUPPO DI TAYLOR

→ IL POLINOMIO CHE MEGLIO APPROSSIMA UNA FUNZIONE

- POLINOMIO DI 1° GRADO → DATA f, VOGLIO $g(x)=ax+b$ CHE APPROSSIMI f

  1° FISSO IL PUNTO DOVE VOGLIO APPROSSIMARE f, IO PRENDO $x_0=0$

  ↳ $f(0)$, $g(0)=b \longrightarrow f(0)=b$ QUINDI $g(x)=ax+f(0)$

  2° IMPONGO CHE g SIA LA MIGLIOR APPROSSIMAZIONE

  ↳ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-ax-f(0)}{x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=a \Rightarrow a=f'(0)$

  ↳ $g(x)=f(0)+f'(0)\cdot x$

CASO IN CUI $x_0 \neq 0$

↳ $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+R_1(x)$

$R_1=f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0))$ → IL RESTO DEVE ESSERE DI ORDINE SUPERIORE RISPETTO AL GRADO UTILIZZATO X L'APPROSSIMAZIONE

$\lim_{x\to x_0}\frac{R_1(x)}{x-x_0}=0$

↳ $\frac{R_1(x)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$

- APPROSSIMAZIONE DI ORDINE SUPERIORE

- DERIVATA DI ORDINE k: $k\in\mathbb{N}$

  ↳ $f^{(k)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(x_0)}{x-x_0}$

→ ESEMPIO $f(x)=x^5$, $f'(x)=5x^4$, $f''(x)=20x^3$, $f'''(x)=60x^2$, $f^{IV}(x)=120x$, $f^{V}(x)=120$, $f^{VI}(x)=0$

$120 \downarrow 5!$

TEOREMA DELLO SVILUPPO DI TAYLOR

- SIA f DERIVABILE m VOLTE IN x_0 $\quad$ $*f^{(0)}(x)=f,\ 0!=1$
- DEFINITO IL POLINOMIO $P_m=\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k$

→ SE IL RESTO DI ORDINE m = $R_m(x)=f(x)-P_m(x)$ ALLORA $\lim_{x\to x_0}\frac{R_m(x)}{(x-x_0)^m}=0$

⇝ P_m È LA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE (LOCALE) DI f CON UN POLINOMIO DI GRADO m

↳ È DETTO POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE m CENTRATO IN x_0

↳ È DETTO POLINOMIO DI MC LAURIN DI ORDINE m SE $x_0=0$

→ ESEMPIO

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+x-8}+2}{x}=\frac{0}{0}=$ F.I

  ↳ AL 1° ORDINE: $f(0)+f'(0)\cdot x+R_1(x)$

  $f(0)=0$

  $f'(x)=((x^2+x+8)^{1/3})'=\frac{1}{3}(x^2+x-8)^{-2/3}\cdot(2x+1)$

  $f'(0)=\frac{1}{3}(-8)^{-2/3}\cdot\frac{1}{12}$

  $f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+R_1(x)=\frac{1}{12}+\lim_{x\to 0}\frac{R_1(x)}{x}=\frac{1}{12}$

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\ln(1+x)}$

→ SVILUPPO $\sin x$ IN 0

$\sin(0)=0$, $\cos(0)=1$ $\qquad$ $\sin x=x+R_1(x)\Rightarrow\frac{R_1(x)}{x}=0$

$\frac{\sin x-x}{x}=\frac{R_1(x)}{x}\xrightarrow{x\to 0}0$

$\ln(1)=0$, $\frac{1}{1+x}(x=0)=1$ $\qquad$ $\ln(1+x)=x+S_1(x)\Rightarrow\frac{S_1(x)}{x}=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{R_1(x)}{x+S_1(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{R_1(x)\to 0}{x\cdot\left(1+\frac{S_1(x)}{x}\right)}$ ↳ 1

- APPROSSIMAZIONE DI UNA DATA FUNZIONE IN UN DATO PUNTO CON UN POLINOMIO DI CERTO GRADO

⇒ DATA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, DERIVABILE IN $x_0\in(a,b)$

↳ $P_m=\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k$ = POLINOMIO DI TAY. DI f DI GRADO m CENTRATO IN x_0

PROPRIETÀ DI P_m: $\lim_{x\to x_0}\frac{R_m(x)}{(x-x_0)^m}=0$, $R_m(x)=f(x)-P_m(x)\Rightarrow f(x)=P_m(x)+R_m(x)$

↳ $o((x-x_0)^m)$ $\Rightarrow f(x)=P_m(x)+o((x-x_0)^m)$

ESEMPIO: $x_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!} \cdot x^k = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + \dots$$

$$\sin(x) = 0 + x - \frac{x^3}{3!} + x^5 + o(x^5)$$ ← RESTO A SECONDA DI DOVE MI FERMO

$$\longrightarrow \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{o(x^3)}{x}$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

ESEMPIO: $x_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!} \cdot x^k = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + \dots$$

$f(0) = \cos(0) = 1$

$f'(0) = -\sin(0) = 0$

$f''(0) = -\cos(0) = -1$

$f'''(0) = \sin(0) = 0$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \longrightarrow \cos(x) - 1 = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \longrightarrow \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4!} + \frac{o(x^4)}{x^2}$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

ESEMPIO: $x_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!} \cdot x^k = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \longrightarrow \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{o(x^4)}{x}$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

ESEMPIO: $x = 0$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \longrightarrow \ln(1+x) - x = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \to 0} \ln(1+x) - x = 0$$

ESERCIZIO

$$f(x) \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{VOGLIO SAPERE CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ}$$

$\lim_{x \to 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \to$ x TEOREMA DEI CARABINIERI: $\lim_{x \to 0} x^2 = \lim_{x \to 0} -x^2 = 0$ QUINDI $\lim_{x \to 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \cdot \sin(1/h) - 0}{h} = h \cdot \sin(1/h) = 0$$

$$f'(x) \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 \end{cases} \longrightarrow \text{LA DERIVATA PRIMA NON È CONTINUA QUINDI NON ESISTE LA DERIVATA 2}$$

POLINOMIO DI TAYLOR: $P_1(x) = 0$ PERCHÉ POSSO FARE SOLO LA DERIVATA 1° ED È ZERO

$$\frac{f - P_1}{x} \to 0 \implies \frac{x \cdot \sin(1/x) - 0}{x} \longrightarrow 0$$

MASSIMI E MINIMI → GUARDO LA DERIVATA SECONDA

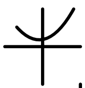
$f''(x_0) < 0$ HO UNA CONCAVITÀ VERSO IL BASSO

$f''(x_0) > 0$ HO UNA CONCAVITÀ VERSO L'ALTO

$f''(x_0) = 0$ HO UN CAMBIO DI CONCAVITÀ

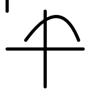
FUNZIONE CONVESSA

f È CONVESSA SE $\forall x_1, x_2$ SI HA CHE $f((1-t)x_1 + t \cdot x_2) \leq (1-t) f(x_1) + t f(x_2)$



FUNZIONE CONCAVA

f È CONCAVA SE $\forall x_1, x_2$ SI HA CHE $f((1-t)x_1 + t \cdot x_2) \geq (1-t) f(x_1) + t f(x_2)$

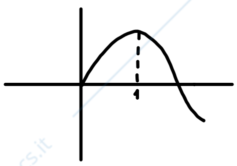


ES ESAME

$f(x) = 3 \cdot x^{2/3} - 2x$ CON $x > 0$

- STUDIO ANDAMENTO

- $\lim_{x \to 0} 3 \cdot x^{2/3} - 2x = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} 3 \cdot x^{2/3} - 2x = -\infty$
  $\hookrightarrow \frac{2}{3}$ vs. $\hookrightarrow 1$
- $f(x) = 0 \implies x = \sqrt[3]{3/2}$
- $f'(x) = 2 \cdot x^{-1/3} - 2$
- $f'(x) > 0 = 0 < x < 1$
- $f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^{-4/3}$
- $f''(x) > 0 \ \nexists x \in \mathbb{R} \to$ CONCAVA



EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

↳ ESEMPIO: POPOLAZIONE

$N:[0,T] \to \mathbb{R}$, VOGLIO IL NUMERO DI INDIVIDUI AL TEMPO $t = N(t)$

* LA POPOLAZIONE DEVE ESSERE OMOGENEA
* LA POPOLAZIONE DEVE ESSERE ISOLATA
* LA VARIAZIONE È DATA DALLA COMPETIVITÀ DEGLI INDIVIDUI
* TASSO NATALITÀ / MORTALITÀ NON SONO COSTANTI $\quad \gamma$ = TASSO DI NATALITÀ $= \gamma(N(t)) = \gamma_1 - \gamma_2 \cdot N(t)$ CON $\gamma_1 \cdot \gamma_2 > 0$

w = TASSO DI MORTALITÀ $= w(N(t)) = w_1 + w_2 \cdot N(t)$ CON $w_1 \cdot w_2 > 0$

↓ CON $h > 0$

$$N(t+h) - N(t) = \gamma(N(t)) \cdot N(t) \cdot h - w(N(t)) \cdot N(t) \cdot h$$

$$= h\, N(t) \cdot ((\gamma_1 - w_1) - (\gamma_2 - w_2)\, N(t))$$

↓ $h \to 0$

LA FUNZIONE DEVE VERIFICARE L'IDENTITÀ

$$\begin{cases} N'(t) = N(t) \cdot (R - \varepsilon N(t)) \\ R = \gamma_1 - w_1 \quad , \varepsilon = \gamma_2 - w_2 \end{cases}$$

- MALTHUS: $u' = k \cdot u$
- MALTHUS + MIGRAZIONI: $u' = k \cdot u + c$
- LOGISTICA: $u' = u(A - Bu)$

PROBLEMA DI CAUCHY: DATO $\bar{u} \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

$u: I \to \mathbb{R}$ E DEVE SODDISFARE $\begin{cases} \text{EQUAZIONE DIFF.} \to a u'(x) + b u(x) = 0 \quad \forall x \in I \\ u(x_0) = \bar{u} \end{cases}$ → LE SOLUZIONI SONO NELLA FORMA $C \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x}$

↳ DETERMINATA DAL DATO INIZIALE: $A = \bar{u} \cdot e^{\frac{b}{a} \cdot x_0}$

• EQUAZIONE LINEARE A COEFF. COSTANTE OMOGENEO (1° ORDINE)

$a u' + b u = 0$ CON $a \neq 0$

RISOLVO: $a u' = -b u \to u' = -\frac{-b u}{a} \to u(x) = C \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x}$ CON $C \in \mathbb{R}$

ESEMPIO: $\begin{cases} a u' + b u = 0 \\ u(0) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} u(x) = C \cdot e^{-b/a \cdot x} \\ u(0) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} u(0) = c \\ u(0) = 2 \end{cases} \longrightarrow C = 2 \longrightarrow u(x) = 2 \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x}$

• EQUAZIONE LINEARE A COEFF. COSTANTE NON OMOGENEO

$$\begin{cases} a u' + b u + c = 0 \quad \text{CON } a \neq 0 \\ u(x_0) = \bar{u} \end{cases}$$

DESCRIVO LE SOLUZIONI: $u(x) = u_{pom}(x) + u_p(x)$ ⟶ PRIMA TROVO LE SOLUZIONI COSTANTI E POI CI AGGIUNGO QUELLA PARTICOLARE

PROBLEMA OMOGENEO
=
SOL. CASO OMOGENEO
$\cdot\; C \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x}$

SOLUZIONE PARTICOLARE
↳ COME LA TROVO?
- $u_p(x) \equiv \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$
- $a(u_p)' + b(u_p) + c = 0 \to$ SE $u_p(x) = \gamma$, $u'_p = 0$

↳ ALLORA $b \cdot \gamma + c = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{c}{b}$

ALLORA TUTTE LE SOLUZIONI SARANNO $u(x) = C \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x} - \frac{c}{b}$ DOVE C È UNA QUALSIASI COSTANTE REALE DETERMINATA DAL CASO INIZIALE

ESEMPIO: $\begin{cases} 3y' + 4y = 0 \\ y(2) = 3 \end{cases} \longrightarrow$ TUTTE LE SOLUZIONI SONO: $y(x) = C \cdot e^{-\frac{4}{3} x} \Rightarrow y(2) = C \cdot e^{-\frac{4}{3} \cdot 2} = 3 \Rightarrow C = 3 \cdot e^{8/3}$

↓

$y(x) = 3 \cdot e^{\frac{8}{3}} \cdot e^{-\frac{4}{3}}$

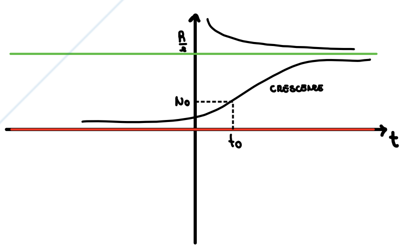
EQUAZIONE LOGISTICA

$$\begin{cases} N'(t) = N(t) \cdot (R - \varepsilon N(t)) = R \cdot N(t) - R \cdot \varepsilon N^2(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

SOLUZIONI: $\cdot\; N(t) \equiv 0$

$\cdot\; N(t) \equiv R/\varepsilon$

$$\left.\begin{cases} R - \varepsilon \cdot \frac{R}{\varepsilon} = 0 \\ N'(t) = \left(\frac{R}{\varepsilon}\right)' = 0 \end{cases}\right] \longrightarrow 0 = \frac{R}{\varepsilon}\left(R - \varepsilon \cdot \frac{R}{\varepsilon}\right)$$



CERCO SOLUZIONI PER $N(t)=\gamma$

- $0 = N' = \gamma \cdot (R - 2\gamma)$
  - ↳ SE $N_0 \in (0; R/2)$ ALLORA N È STRETTAMENTE CRESCENTE
  - ↳ SE $N_0 \in (R/2; 0)$ ALLORA N È STRETTAMENTE DECRESCENTE

EQUAZIONE DIFF. ORDINARIA DEL 2 ORDINE

$\underbrace{\text{2 ORDINE}}_{\text{DERIVATA SECONDA}}$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} \text{EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 2 ORDINE} \longrightarrow a u'' + b u' + c \cdot u = 0 \\ u(x_0) = \bar{u} \\ u'(x_{0}) = \bar{u}_1 \end{cases}$$

2 CONDIZIONI INIZIALI PER AVERE L'UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

1° TROVO TUTTE LE SOLUZIONI

2° TROVO L'UNICA CHE VERIFICA LE CONDIZIONI INIZIALI : $u(x) = A \cdot e^{\lambda x}$

↳ $a\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + b\lambda \cdot e^{\lambda x} + c \cdot e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \cancel{e^{\lambda x}} \cdot (a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \Rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- SE $\Delta > 0$ ALLORA $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow u(x) = A \cdot e^{\lambda_1 x} + B \cdot e^{\lambda_2 x}$
- SE $\Delta = 0$ ALLORA $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \Rightarrow e^{\lambda x}$ e $x e^{\lambda x} \Rightarrow u(x) = A \cdot e^{\lambda x} + B \cdot x \, e^{\lambda x}$?
- SE $\Delta < 0$ ALLORA $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow u(x) = e^{(\alpha \pm i\beta) \cdot x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\pm i\beta x}$

SVILUPPO DI TAYLOR DI e^x

$$e^x = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + o(x^m) = 1 + i\beta x - \frac{\beta^2 x^2}{2} - i \frac{\beta^3 x^3}{3!} + \frac{\beta^4 x^4}{4!} + o(x^m)$$

$\Rightarrow e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i \sin(\beta x)$

↳ $u(x) = e^{\alpha x} (\cos(\pm \beta x) + i \sin(\pm \beta x))$

SOLUZIONE GENERALE:

$u(x) = e^{\alpha x} (A \cdot \cos(\beta x) + B \cdot \sin(\beta x))$

ESEMPIO

$u'' + u = 0 \longrightarrow$ SCRIVO TUTTE LE SOLUZIONI

POLINOMIO ASSOCIATO : $\lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm i$

↳ NELLA FORMA $\lambda = \alpha + i\beta$ $\alpha = 0$ $\beta = 1$

$\Rightarrow u(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$

$$\begin{cases} u'' + u = 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

× DETERMINARE A e B

- $u(x) = A \cdot \cos(0) + B \cdot \sin(0) = u(0) = 0 \longrightarrow A + B \cdot 0 = 0 \longrightarrow A = 0$
- $u(x) = A \cdot \sin(0) + B \cdot \cos(0) = u'(0) = 1 \longrightarrow A \cdot 0 + B = 1 \longrightarrow B = 1$

LA SOL. DEL PROBLEMA DI CAUCHY: $u(x) = \sin(x)$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y'' + 2y'(x) + y(x) = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

POLINOMIO ASSOCIATO : $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 \Rightarrow \lambda = -1$

↳ $e^{\lambda x}$ e $x e^{\lambda x} = e^{-x}$ e $x e^{-x} \Rightarrow y(x) = A e^{-x} + B x e^{-x}$

$y(1) = 0 \Rightarrow A \cdot e^{-1} + B \cdot e^{-1} = 0 \longrightarrow A + B = 0$ $A = -\frac{1}{2}$

$y'(0) = 1 \Rightarrow -A \cdot e^{-x} + B(e^{-x} - x \cdot e^{-x}) \longrightarrow -A + B = 1$ $B = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

P. ASSOCIATO $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 3$

$u(x) = A \cdot e^{2x} + B \cdot e^{3x}$

$y(0) = A \cdot e^2 + B \cdot e^3 = 0 \Rightarrow A + B = 0$ $A = -B$ $B = +1$

$y'(0) = 2Ae^{2x} + 3Be^{3x} = 0 \Rightarrow 2A + 3B = 1$ $2A = 1 - 3B \Rightarrow 2A = 1 + 3A \Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A = -1$

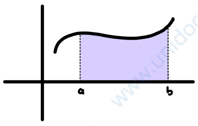
$$\begin{cases} y'' + 3y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

P.A $= \lambda^2 + 3 = 0$ $\lambda_1 = \sqrt{3}i$ $\lambda_2 = -\sqrt{3}i$

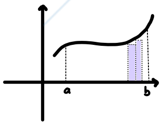
$u(x) = (A + 0) = 1$ $A = 1$ $B = 0$

INTEGRALI

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, CONTINUA



$\longrightarrow$ VOGLIO CALCOLARE L'AREA

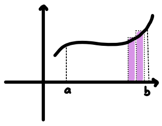


SUDDIVIDO L'INTERVALLO $[a,b]$ IN m PARTI DI LUNGHEZZA UGUALE
↳ INDICO CON m_i IL MINIMO DI f SULL'i-ESIMO INTERVALLO

↳ APPROSSIMO L'AREA DEL TRAPEZIO CONSIDERANDO I RETTANGOLI ISCRITTI, INDICANDO CON s_m L'AREA $\quad s_m = \sum_{i=1}^{m} m_i \cdot \ell$

LO RIPETO PRENDENDO COME ALTEZZA M_i
↳ M_i = MASSIMO DI f SULL'i-ESIMO INTERVALLO

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} M_i \cdot \ell$$



$\Downarrow$

L'AREA DEL TRAPEZIO È COMPRESA TRA S_m E s_m = $s_m < S < S_m$

TEOREMA

SE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ È CONTINUA E NON NEGATIVA, ALLORA LE SUCCESSIONI S_m E s_m CONVERGONO ALLO STESSO LIMITE

$\Rightarrow \lim_{m \to +\infty} S_m = \lim_{m \to +\infty} s_m = S \longrightarrow S$ SI INDICA CON $\int_a^b f(x)\,dx$ (L'INTEGRALE DEFINITO DI f TRA a E b)
↳ RAPPRESENTA L'AREA ORIENTATA (CON SEGNO)

PROPIETA' INTEGRALE DEFINITO

- LINEARITA' $\int_a^b (\lambda \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \quad \to \lambda, \beta \in \mathbb{R}$
- ADDITIVITA' $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \to \forall\, a \leq c \leq b$
- MONOTONIA SE $m \leq f(x) \leq M$ ALLORA $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \in M \cdot (b-a)$
  SE f È CONTINUA $\exists\, c \in (a,b)$ T.C. $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \cdot f(c) \longrightarrow$ TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

PROPRIETA' INTEGRALE INDEFINITO

- $\int a \cdot f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$
- $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x) + \int g(x) = F + G$ = PRIMITIVE DI F E G

IL CALCOLO

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA ($a, b \in \mathbb{R}$)
ALLORA LA FUNZIONE INTEGRALE $[a,b] \ni x \longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt$

TEOREMA DI TORRICELLI

SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA E $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$
ALLORA F È DERIVABILE E $F'(x) = f(x)$
↳ LA DERIVATA PRIMA DELLA FUNZIONE INTEGRALE COINCIDE CON LA FUNZIONE INTEGRANDA)

DIMOSTRO

- CALCOLO $\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$

- $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt$

$\rightsquigarrow F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt \quad$ CON $h > 0$

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

DAL TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE $= f(c_h) \cdot (x+h-x)$

$\exists\, c_h \in (x, x+h) = f(c_h) \cdot h$ TALE CHE $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c_h)$ CON $x \leq c_h \leq x+h$

PRENDIAMO $\lim_{h \to 0} \longrightarrow$ DAL TEOREMA DEI CARABINIERI $c_h \to x$

f È CONTINUA $\Rightarrow \lim_{h \to 0} f(c_h) = f(x)$

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$

PRIMITIVA DI f E INTEGRALE INDEFINITO

SI DICE CHE F È UNA PRIMITIVA DELLA FUNZIONE f IN $[a,b]$ SE F È DERIVABILE IN $[a,b]$ E $F'(x)=f(x)\ \forall x \in [a,b]$

↳ IL CALCOLO DELLA PRIMITIVA È IL PROBLEMA INVERSO DEL CALCOLO DELLA DERIVATA.

CALCOLARE LA PRIMITIVA SIGNIFICA DATA f TROVARE $F: F'=f$

OSSERVAZIONE

1) SE F e G SONO DUE PRIMITIVE DI f, DIFFERISCONO PER UNA COSTANTE $\exists k \in \mathbb{R}$

↳ $F(x)=G(x)+k$

DEFINIZIONE DI INTEGRALE INDEFINITO DI f

$$\int f(x)\,dx = \{g:[a,b]\to\mathbb{R} : g'(x)=f(x)\}$$

DEFINIZIONE DI INTEGRALE DEFINITO

$\int_a^b f(t)\,dt$, F SUA FUNZIONE INTEGRALE

↳ $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

→ PRENDIAMO G, UNA QUALSIASI PRIMITIVA DI f

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt = G(x)+c \quad \forall x\in[a,b] \quad \text{PER OGNI } c\in\mathbb{R}$$

2) $x=0$

$$0=\int_a^a f(t)\,dt = G(a)+c \rightsquigarrow c=-G(a)$$

3) $x=b$

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b)-G(a) = G(x)\Big|_a^b$$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ E CONTINUA

ALLORA $\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-F(a)$ x UNA QUALSIASI PRIMITIVA G DI f $(G'=f)$ ⟶ OSSERVAZIONE: $G(b)-G(a)=(G+c)\cdot(b)-(G+c)\cdot(a)$

NELLA PRATICA

- $\int \cos(x)\,dx = \sin(x)+c$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+c$
- $\int e^x\,dx = e^x$
- $\int 1\,dx = x+c$
- $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+c$
- $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$
- $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)+c$
- $\int \frac{1}{\cos^2}\,dx = \tan(x)+c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)+c$

→ $\int \sqrt{x} = \int x^{1/2} = \frac{2\cdot x^{3/2}}{3}$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0)=1$$

INTEGRAZIONE x SOSTITUZIONE

DATE $f,g \to (g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$

$\Rightarrow \int (g\circ f)'(x)\,dx = \int g'(f(x))\cdot f'(x)\,dx = g(f(x))+c$

ES: $\int (e^x+4x)\cdot\sin(e^x+2x^2) = -\cos(e^x+2x^2)+1$

ES: $\int (\sin x)^3\cdot\cos x\,dx = \frac{(\sin x)^4}{4}+c$

ES: $\int (x+4)^{17}\,dx \quad x+4=t \Rightarrow \int t^{17}\,dt = \frac{t^{18}}{18} = \frac{(x+4)^{18}}{18}$

ES: $\int \cos(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3)+c$

ES: $\int_0^5 x\cdot e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^5 -2x\cdot e^{-x^2} = \frac{-e^{-x^2}}{2}+c = \frac{-e^{-25}}{2}+\frac{1}{2}$

INTEGRAZIONE PER PARTI

- $\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$
- $\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = f\cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$

ES: $\int \overset{g}{e^x}\cdot\overset{f'}{\cos(x)} = \overset{g}{e^x}\cdot\overset{f}{\sin x} - \int \overset{g'}{e^x}\cdot\overset{f}{\sin x}$ ⟶ $e^x\cdot\sin x - (e^x\cdot -\cos x - \int e^x\cdot(-c$

$f(x)=\sin x \quad f'(x)=\cos x \qquad f(x)=-\cos x \quad f'(x)=\sin x$

$g(x)=e^x \quad g'(x)=e^x \qquad g(x)=e^x \quad g'(x)=e^x$

$\Rightarrow e^x\cdot(\sin x+\cos x) - \int e^x\cdot\cos x\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}e^x\cdot(\sin x+\cos x)$

INTEGRALI IRRAZIONALI

1) GRADO NUMERATORE PIÙ PICCOLO DEL DENOMINATORE

$$\frac{N(x)}{D(x)} = a(x) + \frac{N(x)}{D(x)}$$

2) GRADO $D < 2$

$\longrightarrow D=1$

$$f(x) = \frac{c}{\delta x+\beta} \quad \to \int \frac{c}{\delta x+\beta} = c\int \frac{1}{\delta x+\beta} = c \cdot \ln|\delta x+\beta| = \frac{\ln(\delta x+\beta)'}{\delta} = \frac{1}{\delta x+\beta} + c'$$

$\longrightarrow D=2$

$$f(x) = \frac{mx+q}{x^2+\beta x+\gamma}$$

3) $\Delta>0 \longrightarrow D(x) = (x-\lambda_1)\cdot(x+\lambda_2)$

$$\rightsquigarrow f(x) = \frac{A}{x-\lambda_1} + \frac{B}{x+\lambda_2}$$

ES: $f(x) = \frac{x+3}{x^2-3x+2} = \frac{x+3}{(x-2)\cdot(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax-A+Bx-2B}{(x-2)\cdot(x-1)} = \frac{x(A+B)-A-2B}{(x-2)\cdot(x-1)}$

$A+B=1 \qquad -A-2B=3$

$A=5,\ B=-4$

$$\int \frac{5}{x-2}\,dx - \int \frac{4}{x-1}\,dx = 5\ln|x-2| - 4\ln|x-1|$$

4) $\Delta=0 \quad D(x) = (x-\lambda)^2$

$$\rightsquigarrow f(x) = \frac{A}{x-\lambda} + \frac{B}{x+\lambda}$$

ES: $\frac{x+5}{x^2-2x+1} = \frac{x+5}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{Ax-A+B}{(x-1)^2}$

$A=1 \qquad -A+B=5$

$A=1,\ B=6$

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{6}{(x-1)^2} = 1\cdot\ln|x-1| - \frac{6}{(x-1)}$$

5) $\Delta<0$ NON CI SONO DOMINI REALI

$\rightsquigarrow f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = N(x) = A\cdot D'(x) + B$ ES 1: $\frac{5x+3}{x^2+4x+5}$

$N(x) = 5x+3$

$D(x) = x^2+4x+5 \longrightarrow D'(x) = 2x+4$

$5x+3 = A\cdot 2x+4+B \Rightarrow 5x+3 = 2Ax+4A+B$

$2A=5 \qquad 4A+B=3$

$A=\frac{5}{2},\ B=-7$

$$\int \frac{\frac{5}{2}\cdot(2x+4)-7}{x^2+4x+5} = \frac{5}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+5} - 7\int \underbrace{\frac{1}{x^2+4x+5}}_{\substack{x^2+4x+4+1 \\ (x+2)^2+1}} = \frac{5}{2}\ln|x^2+4x+5| - 7\int\frac{1}{(x+2)^2+1} = \frac{5}{2}\ln|x^2+4x+5| - 7\,\mathrm{arctg}(x+2)$$

$$\frac{1}{t^2+1} = \mathrm{arctg}(t)$$

ES 2: $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1} \qquad x = A\cdot 2x+1+B$

$\hookrightarrow 2A=1 \quad A=\frac{1}{2}$

$\hookrightarrow A+B=0 \quad B=-\frac{1}{2}$

$D = x^2+x+1$

$D' = 2x+1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int\underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}} = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\int\frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+1\right.} =$$

?

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right) = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right] = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+1\right.$$

INTEGRALI IMPROPRI

$$\rightsquigarrow \int_a^{+\infty} f(x)$$

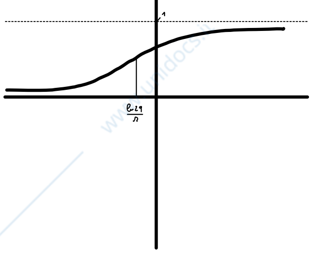
ES: $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} -e^{-t}\Big|_0^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-\infty}-(-1)\right) = 0+1 = 1$

ES: $\int_1^{+\infty} x^{-5} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t x^{-5} = \lim_{t\to+\infty}\frac{x^{-4}}{-4}\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{-4\cdot\infty^{-4}} - \left(\frac{1^{-4}}{-4}\right)\right] = 0+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

ES: $\int_0^1 \frac{1}{x} = \lim_{x\to0^+}\ln|x|\Big|_0^1 = \lim_{x\to0^+}(+\infty+0) = +\infty$

ESERCIZI

$f(x) = \dfrac{1}{1+q\cdot e^{-2x}}$ CON $q, 2 > 0$ STUDIO QUALITATIVO



DOM: $\mathbb{R}$

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+q\cdot e^{\infty}} = 1$

- $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+q\cdot e^{-\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

- $f'(x)' = \dfrac{2\cdot q\cdot e^{-2x}}{(1+q\cdot e^{-2x})^2}$ $\to$ SEMPRE MAGGIORE DI ZERO $\to$ $f(x)$ STRETTAMENTE CRESCENTE.

- $f''(x) = \dfrac{\quad}{(1+q\cdot e^{-2x})^4}$

  $\hookrightarrow$ $f''(x) > 0 \Rightarrow x \leq \dfrac{\ln 2q}{2}$

  $\dfrac{\ln 2q}{2}$

  $\cup \mid \cap$

ESERCIZI

MASSIMI E MINIMI $f(x) = e^{-x}\cdot(x^2+2x-1)$

$f'(x) = -e^{-x}\cdot(x^2+2x-1)+(2x+2)\cdot(e^{-x}) = e^{-x}(-x^2-2x+1+2x+2) = e^{-x}\cdot(-x^2+3)$

$f'(x) = 0 \quad e^{-x}(-x^2+3)$ $\quad \cdot\, e^{-x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\cdot\, -x^2+3 > 0 \quad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	
+	+	+	+	
−	+	+	−	
↘	↗	↗	↘	
	MIN		MAX	

$\hookrightarrow$ LOCALI O GLOBALI?

$\cdot \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cdot(x^2+2x-1) = 0$ $\qquad$ $\sqrt{3}$ NON È UN MASSIMO GLOBALE

$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\cdot(x^2+2x-1) = +\infty$

? $-\sqrt{3}$? SOSTITUISCO $e^{-\sqrt{3}}\cdot(3-2\sqrt{3})-1) = 2e^{\sqrt{3}}(1-\sqrt{3}) < 0$ QUINDI MINIMO GLOBALE

ESERCIZIO

$f(x) = x^3 - \quad ^2+9x-1$? MAX E MIN GLOBALI IN INTERVALLO $[0,2]$

$\hookrightarrow$ IL MINIMO NELL'INTERVALLO È $x=0$

$-12x+9=0 \quad x=1,\ x=3$

$3x^2-12x+9>0 \quad x\leq 1,\ x\geq 3$

1 3
↗ | ↘ | ↗
MAX MIN

$\hookrightarrow$ GLOBALE XKÈ C'È L'INTERVALLO

ESERCIZI

$f(x) = 6+\sin(6x)$ NELL'INTERVALLO $[0, 4\pi]$

MIN E MAX? $f'(x) = (\cos 6x) = 0$ $\quad 6x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in$ $\Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$ $\Rightarrow \frac{\cancel{\pi}}{12} + \frac{k\cancel{\pi}}{6} < 4\cancel{\pi}$ $\quad k \leq 23+1$

$\downarrow$ $k=0$ È ACCETTATO

$\Rightarrow$ CI SONO 24 VOLTE IN CUI LA DERIVATA SI ANNULLA

$\hookrightarrow$ NELL'INTERVALLO AGLI ESTREMI HO DUE ESTREMI = 26

ESERCIZI

$f(x) = 4\cdot\cos(2x)+3x^3+e^{2x}+9x$

$P_2(1)$? $P_2 \to$ POLINOMI DI SECONDO ORDINE DI TAYLOR

$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \dfrac{f^{k}(0)}{k!}\cdot x^k = f(0)+f'(0)\cdot x+\dfrac{f''(0)}{2}\cdot x^2$

$P_2(1) = f(0)+f'(0)+\dfrac{f''(0)}{2}$

$f(0) = 4\cdot\cos(0)+3\cdot 0^3+e^0+9\cdot 0 = 4+1 = 5$

$f'(x) = -8\sin(2x)+9x^2+2\cdot e^{2x}+9$

$f'(0) = 11$

$f''(x) = -16\cos(2x)+18x+4e^{2x}$

$f''(0) = -12$

$P_2(1) = 5+11-6 = 10$