

Esercizio 4. Determinare la soluzione generale ed una base per lo spazio delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ -x + y + 2z + t = 0 \\ 3y + 5z + 2t = 0 \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Procediamo con operazioni elementari sulle righe della matrice del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Quindi il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ 3y + 5z + 2t = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $y = -5z/3 - 2t/3$ e, sostituendo nella prima, $x = z/3 + t/3$. Quindi la soluzione generale è

$$V := \{(a + b, -5a - 2b, 3a, 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1, -5, 3, 0), (1, -2, 0, 3)).$$

Esercizio 5. Siano date le due equazioni $3x - y + z = 0$ e $x - 2y - 3z = 0$.

- (1) Aggiungere una terza equazione in modo da ottenere un sistema con la sola soluzione nulla.
- (2) Aggiungere una terza equazione in modo da ottenere un sistema con infinite soluzioni. È possibile ottenere ∞^2 soluzioni?

Svolgimento. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ ax + by + cz = d. \end{cases}$$

Le matrici incompleta e completa del sistema sono

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad (A|B) := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema di cui sopra ammette un'unica soluzione se e solo se $g(A) = 3$. Per esempio $a = b = 0$, $c = 1$ e d arbitrario. Affinché tale unica soluzione sia quella nulla è necessario e sufficiente che $d = 0$.

Invece, affinché il sistema abbia infinite soluzioni è necessario e sufficiente che $g(A|B) = g(A) < 3$. Quindi basta scegliere una combinazione lineare delle due prime equazioni: per esempio la loro somma, cioè $a = 4$, $b = -1$, $c = -2$, $d = 0$.

Poiché le prime due equazioni sono comunque linearmente indipendenti $g(A) \geq 2$, perciò la dimensione dello spazio delle soluzioni è $3 - g(A) \leq 2$: in particolare non è possibile determinare a, b, c, d in modo tale che il sistema abbia ∞^2 soluzioni.