

Lezione 16

16.1 Dimensione di uno spazio vettoriale

Abbiamo visto nella lezione precedente come l'esistenza di una base in uno spazio vettoriale V su un campo K permetta di sostituire a V , che può essere "complicato" da trattare, uno spazio K^n , in maniera che le operazioni si conservino tramite tale identificazione: ci poniamo il problema di capire se tale numero n (che chiameremo tra poco *dimensione* dello spazio V) è in qualche modo un attributo intrinseco di V .

La definizione di dimensione è giustificata dal seguente risultato fondamentale.

Lemma 16.1 (Lemma di Steinitz). *Sia V uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono generatori e $w_1, \dots, w_m \in V$ sono linearmente indipendenti, allora vale $m \leq n$.*

Dimostrazione. Poiché i vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ sono generatori di V , esistono scalari $a_{i,j} \in K$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, tali che

$$\begin{cases} a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + a_{1,3}v_3 + \dots + a_{1,n-1}v_{n-1} + a_{1,n}v_n = w_1 \\ a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + a_{2,3}v_3 + \dots + a_{2,n-1}v_{n-1} + a_{2,n}v_n = w_2 \\ a_{3,1}v_1 + a_{3,2}v_2 + a_{3,3}v_3 + \dots + a_{3,n-1}v_{n-1} + a_{3,n}v_n = w_3 \\ \vdots \\ a_{m,1}v_1 + a_{m,2}v_2 + a_{m,3}v_3 + \dots + a_{m,n-1}v_{n-1} + a_{m,n}v_n = w_m. \end{cases} \quad (16.1.1)$$

Dalla famiglia di identità vettoriali (16.1.1) otteniamo una matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{m,n}$; ogni operazione elementare su A equivale ad un'analoga operazione sulle identità di (16.1.1).

Con un numero finito di operazioni elementari di riga di tipo E1 possiamo trasformare A in una nuova matrice ridotta per righe $A' = (a'_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{m,n}$ corrispondente a delle nuove identità vettoriali aventi come termini noti certe combinazioni lineari dei vettori w_1, \dots, w_m .

Poiché ogni identità (16.1.1) contiene un vettore w_i e i vettori w_1, \dots, w_m sono linearmente indipendenti, dopo tali operazioni il termine noto dell' i -esima identità conterrà ancora il vettore w_i con coefficiente 1.

Se per assurdo fosse $m > n$, almeno una riga di A' (per fissare le idee diciamo quella di indice m) sarebbe nulla, quindi avremmo una relazione di dipendenza lineare del tipo

$$0v = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = b_1w_1 + \dots + b_{m-1}w_{m-1} + 1w_m$$

che non è possibile se, come stiamo supponendo, i vettori w_1, \dots, w_m sono linearmente indipendenti. Concludiamo che $m \leq n$. \square

Corollario 16.2. Sia V uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e siano $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathcal{D} = (w_1, \dots, w_m)$ due basi di V . Allora $m = n$.

Dimostrazione. Poiché v_1, \dots, v_n sono generatori di V e w_1, \dots, w_m sono linearmente indipendenti, per il Lemma 16.1 risulta $m \leq n$. Similmente, poiché w_1, \dots, w_m sono generatori di V e v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti, ancora per il Lemma 16.1 risulta anche $m \geq n$. \square

Quindi in uno spazio vettoriale finitamente generato e non nullo tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi. Questa osservazione ci permette di introdurre la seguente definizione.

Definizione 16.3 (Dimensione di uno spazio vettoriale). Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

La *dimensione* di V è il numero $\dim_K(V)$ definito come segue:

- se $V = \{0_V\}$, poniamo $\dim_K(V) = 0$;
- se $V \neq \{0_V\}$, $\dim_K(V)$ è il numero di elementi di una qualsiasi sua base;

Nel caso in cui il campo K sia evidente dal contesto, si scrive semplicemente $\dim(V)$.

Se lo spazio V non è finitamente generato, allora poniamo per convenzione $\dim_K(V) = \infty$, e V è detto spazio vettoriale di dimensione infinita.

Esempio 16.4. Dall'Esempio 15.7 segue che la base canonica $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ è una base di \mathbb{R}^3 , quindi $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$.

Più in generale, sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Allora la base canonica $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ di K^n (si veda ancora l'Esempio 15.7) è formata da n vettori, dunque $\dim_K(K^n) = n$. \spadesuit

Esempio 16.5. Dall'Esempio 15.8 segue che lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^{2,2}$ ha come base $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$, quindi $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2,2}) = 4$.

Più in generale, se $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, allora $\dim_K(K^{m,n}) = mn$. \spadesuit

Esempio 16.6. Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{C} . Poiché $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, allora V è anche uno spazio vettoriale su \mathbb{R} : l'operazione di somma rimane la stessa, quella di prodotto per uno scalare si ottiene restringendo quella definita in V a $\mathbb{R} \times V \subseteq \mathbb{C} \times V$.

Per esempio \mathbb{C} è uno spazio vettoriale su \mathbb{C} , $1 \in \mathbb{C}$ è linearmente indipendente e genera \mathbb{C} come spazio vettoriale su \mathbb{C} , poiché $a + bi = (a + bi)1$, dunque $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$, come già sappiamo.

D'altra parte \mathbb{C} è anche spazio vettoriale su \mathbb{R} . Da questo punto di vista 1 non è più generatore di \mathbb{C} su \mathbb{R} : infatti se lo fosse ogni suo elemento sarebbe combinazione lineare di 1 a coefficienti in \mathbb{R} e, in questo modo, possiamo ottenere solo i numeri complessi con parte immaginaria nulla. Per generare \mathbb{C} su \mathbb{R} occorrono almeno due elementi: per esempio 1 ed i sono generatori di \mathbb{C} su \mathbb{R} , poiché $a + bi = (a)1 + (b)i$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Inoltre essi sono linearmente indipendenti: infatti se $a, b \in \mathbb{R}$, risulta $a + bi = 0$ se e solo se $a = b = 0$. Concludiamo che $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

Più in generale si può dimostrare che se $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$, allora $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$. \spadesuit

Concludiamo il paragrafo con la seguente conseguenza della Proposizione 15.9.

Proposizione 16.7. Sia $V \neq \{0_V\}$ uno spazio vettoriale su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Se $\dim_K(V) = n$ e $v_1, \dots, v_n \in V$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) $v_1, \dots, v_n \in V$ sono generatori di V ;
- (ii) $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti;
- (iii) (v_1, \dots, v_n) è base di V .

Dimostrazione. Se i vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ sono generatori di V scartando eventualmente alcuni di loro otteniamo una base di V : poiché ogni base di V è costituita da n vettori, non è necessario scartare niente, cioè v_1, \dots, v_n sono già linearmente indipendenti.

Viceversa, se i vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti, aggiungendo eventualmente altri vettori otteniamo una base di V : poiché ogni base di V è costituita da n vettori, non è necessario aggiungere niente, cioè w_1, \dots, w_n sono già generatori di V .

Quindi (i) vale se e solo se vale (ii), dunque sono equivalenti a (iii). \square

Esempio 16.8. In \mathbb{R}^4 si considerino i vettori $v_1 = (1, 2, \pi, 0)$, $v_2 = (3/2, -117, 0, \sqrt{2})$, $v_3 = (0, 1, 0, -3/7)$, $v_4 = (0, 3, 0, 0)$. La relazione di dipendenza lineare

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

tra di loro si traduce immediatamente nel sistema omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - 117\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ \pi\alpha_1 = 0 \\ \sqrt{2}\alpha_2 - \frac{3}{7}\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

È facile vedere che l'unica soluzione di tale sistema è $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, cioè i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti. Per la Proposizione 16.7 concludiamo che essi sono anche generatori di \mathbb{R}^4 senza doverlo verificare direttamente. In particolare $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ è una base di \mathbb{R}^4 . \spadesuit

16.2 Dimensione di sottospazi

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e sia $W \subseteq V$ un suo sottospazio vettoriale: in questo paragrafo ci occuperemo di rispondere alle domande naturali. W è finitamente generato? Se lo è, ci sono legami tra $\dim_K(W)$ e $\dim_K(V)$?

Proposizione 16.9. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Allora ogni sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ è finitamente generato. Inoltre si ha che $\dim_K(W) \leq \dim_K(V)$ e $\dim_K(W) = \dim_K(V)$ se e solo se $W = V$.

Dimostrazione. Se $W = \{0_V\}$ la tesi è ovviamente verificata.

Supponiamo che $W \neq \{0_V\}$ non sia finitamente generato. Allora esiste $w_1 \in W \setminus \{0_V\}$: risulta $\mathcal{L}(w_1) \subset W$, quindi deve esistere $w_2 \in W \setminus \mathcal{L}(w_1)$. Per costruzione w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti e, per ipotesi, deve esistere $w_3 \in W \setminus \mathcal{L}(w_1, w_2)$.

In questo modo riusciamo a costruire una successione di vettori $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq W$ tale che, per ogni $N \in \mathbb{N}$, i vettori $w_1, \dots, w_N \in W$ sono linearmente indipendenti. In particolare ciò dovrebbe

accadere anche per $N = \dim_K(V) + 1$, il che è assurdo perché contraddice il Lemma 16.1, visto che i vettori w_1, \dots, w_N sono in W , quindi in V .

Quindi W è finitamente generato; sia (w_1, \dots, w_m) una sua base. Poiché $w_1, \dots, w_m \in W \subseteq V$ sono linearmente indipendenti (perché formano una base di W), allora $\dim_K(W) = m \leq \dim_K(V)$, di nuovo per il Lemma 16.1.

Chiaramente se $W = V$ allora $\dim_K(W) = \dim_K(V) = n$. Viceversa, se $\dim_K(W) = \dim_K(V) = n$, allora esiste un insieme di vettori linearmente indipendenti w_1, \dots, w_n di $W \subseteq V$, quindi w_1, \dots, w_n generano V per la Proposizione 16.7: poiché $W \subseteq V$ segue $W = V$. \square

Esempio 16.10. In \mathbb{R}^4 si considerino i cinque vettori $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (2, 1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 0, 0)$, $v_4 = (1, 1, 0, 0)$, $v_5 = (4, 4, 0, 1)$. Calcoliamo la dimensione del sottospazio $W = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \subseteq \mathbb{R}^4$. Abbiamo visto nell'Esempio 15.10 che $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_4)$ è una base di $W \subset \mathbb{R}^4$, quindi $\dim(W) = 3 < 4$: in particolare $W \subsetneq \mathbb{R}^4$. \spadesuit

Esempio 16.11. Sia $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{m,n}$. Abbiamo verificato nell'Esempio 13.14 che l'insieme W delle soluzioni in $K^{n,p}$ del sistema omogeneo $AX = 0_{m,p}$ è un sottospazio. Poiché $K^{n,p}$ è finitamente generato, è lecito calcolare la dimensione di W . Poiché la dimensione di W dipende solo dal sottospazio W e non dalla matrice A , possiamo supporre che A sia fortemente ridotta per righe e, per fissare le idee, possiamo anche supporre che il suo pivot sulla i -esima riga si trovi nella colonna i -esima.

Quindi, posto $r = \text{rk}(A)$, il sistema $AX = 0_{m,p}$ è della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,r+1} & a_{1,r+2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,r+1} & a_{2,r+2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{r,r+1} & a_{r,r+2} & \dots & a_{r,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} X = 0_{m,p}. \quad (16.2.1)$$

Indicando con X_i la i -esima riga di X , segue che le soluzioni del sistema (16.2.1) dipendono dai parametri (vettoriali) liberi X_{r+1}, \dots, X_n .

Per semplicità limitiamoci, d'ora in poi, a studiare il caso $p = 1$, cioè $X \in K^{n,1}$. Le soluzioni del sistema (16.2.1) sono allora tutte e sole le matrici colonna della forma

$$\begin{pmatrix} -a_{1,r+1}X_{r+1} - a_{1,r+2}X_{r+2} - \dots - a_{1,n}X_n \\ -a_{2,r+1}X_{r+1} - a_{2,r+2}X_{r+2} - \dots - a_{2,n}X_n \\ \vdots \\ -a_{r,r+1}X_{r+1} - a_{r,r+2}X_{r+2} - \dots - a_{r,n}X_n \\ X_{r+1} \\ X_{r+2} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \sum_{j=r+1}^n C_j X_j,$$

dove

$$C_{r+1} = \begin{pmatrix} -a_{1,r+1} \\ -a_{2,r+1} \\ \vdots \\ -a_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{r+2} = \begin{pmatrix} -a_{1,r+2} \\ -a_{2,r+2} \\ \vdots \\ -a_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad C_n = \begin{pmatrix} -a_{1,n} \\ -a_{2,n} \\ \vdots \\ -a_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

In particolare $W = \mathcal{L}(C_{r+1}, C_{r+2}, \dots, C_n)$. Inoltre la relazione di dipendenza lineare

$$\alpha_{r+1}C_{r+1} + \alpha_{r+2}C_{r+2} + \dots + \alpha_n C_n = 0_{K^{n,1}}$$

si traduce in un sistema le cui ultime $n-r$ equazioni sono $\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \dots = \alpha_n = 0$. Concludiamo che $C_{r+1}, C_{r+2}, \dots, C_n$ sono generatori linearmente indipendenti di W che, quindi, ha dimensione $\dim_K(W) = n-r = n - \text{rk}(A)$. In particolare **il rango di una matrice dipende solo dalla matrice stessa e non dalle operazioni elementari fatte su di essa per calcolarlo**, come già anticipato senza dimostrazione nella Lezione 3!

Se, invece, $p \geq 2$, il lettore verifichi che $\dim_K(W) = (n - \text{rk}(A))p$ seguendo lo stesso procedimento. ♠

Esempio 16.12. Si consideri il sottospazio di $K^{n,n}$ costituito dalle matrici triangolari superiori:

$$TS_n(K) = \{ A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n,n} \mid a_{i,j} = 0 \text{ se } i > j \}.$$

Osserviamo che $TS_n(K)$ è un sottospazio vettoriale di $K^{n,n}$; infatti la matrice nulla $0_{n,n} \in TS_n(K)$. Inoltre se $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ e $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in TS_n(K)$ e $\lambda \in K$, le entrate di indici (i,j) di $A+B$ e di λA sono $a_{i,j} + b_{i,j}$ e $\lambda a_{i,j}$, che sono dunque nulle se $i > j$, cioè $A+B$ e λA sono triangolari superiori.

Poiché $K^{n,n}$ è finitamente generato, tale deve essere $TS_n(K)$: calcoliamone la dimensione. Si noti che $E_{i,j} \in TS_n(K)$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$ con $i \leq j$. Tali matrici sono linearmente indipendenti e possiamo scrivere una qualsiasi matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

come combinazione lineare

$$A = a_{1,1}E_{1,1} + a_{1,2}E_{1,2} + a_{1,3}E_{1,3} + \dots + a_{2,2}E_{2,2} + a_{2,3}E_{2,3} + \dots + a_{3,3}E_{3,3} + \dots,$$

ovvero $TS_n(K) = \mathcal{L}(E_{i,j} \mid i, j = 1, \dots, n, i \leq j)$.

Dunque, fissato un ordine, tali matrici formano una base di $TS_n(K)$: in particolare

$$\dim_K(TS_n) = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = n(n+1)/2.$$

Si considerino i sottoinsiemi di $K^{n,n}$ costituiti dalle matrici triangolari inferiori, strettamente triangolari superiori, strettamente triangolari inferiori, cioè rispettivamente

$$TI_n(K) = \{ A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in K^{n,n} \mid a_{i,j} = 0 \text{ se } i < j \},$$

$$STS_n(K) = \{ A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in K^{n,n} \mid a_{i,j} = 0 \text{ se } i \geq j \},$$

$$STI_n(K) = \{ A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in K^{n,n} \mid a_{i,j} = 0 \text{ se } i \leq j \}.$$

Come esercizio, il lettore dimostri che $STS_n(K)$, $TI_n(K)$ e $STI_n(K)$ sono sottospazi vettoriali di $K^{n,n}$ e ne determini basi, verificando che $\dim_K(TI_n) = n(n+1)/2$ e $\dim_K(STS_n) = \dim_K(STI_n) = n(n-1)/2$. ♠

Esempio 16.13. L'esempio precedente è un caso particolarmente fortunato in cui l'intersezione di una base dello spazio vettoriale V con il sottospazio W , dà una base di W : purtroppo non è sempre così. Si consideri il sottoinsieme di $K^{n,n}$ costituito dalle matrici simmetriche, cioè

$$Sim_n(K) = \{ A \in K^{n,n} \mid {}^t A = A \}.$$

Osserviamo che $Sim_n(K)$ è un sottospazio vettoriale di $K^{n,n}$. Infatti $0_{n,n} \in Sim_n(K)$; se $A, B \in Sim_n(K)$ e $\lambda \in K$, per le proprietà che legano la trasposizione alla somma di matrici ed al prodotto di matrici per scalari, si ha

$$A + B = {}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B = {}^t A + {}^t B, \quad \lambda A = {}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A = \lambda A,$$

cioè $A + B, \lambda A \in Sim_n(K)$.

Poiché $K^{n,n}$ è finitamente generato, tale deve essere $Sim_n(K)$. Per calcolare la sua dimensione restringiamoci, per semplicità, al caso $n = 2$, $K = \mathbb{R}$: tratteremo il caso generale più avanti. In questo caso sappiamo che una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ è data da $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$. Da un lato osserviamo che non ogni matrice di $\mathbb{R}^{2,2}$ è simmetrica, dunque sicuramente

$$\dim_{\mathbb{R}}(Sim_2(\mathbb{R})) \leq 3 < 4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2,2}).$$

Dall'altro gli elementi della base \mathcal{B} che sono in $Sim_2(\mathbb{R})$ sono $E_{1,1}$ ed $E_{2,2}$, che sono linearmente indipendenti, dunque $\dim_{\mathbb{R}}(Sim_2(\mathbb{R})) \geq 2$.

Se fosse $\dim_{\mathbb{R}}(Sim_2(\mathbb{R})) = 2$, per la Proposizione 16.7 seguirebbe che $E_{1,1}$ ed $E_{2,2}$ sarebbero generatori di $(Sim_2(\mathbb{R}))$. Tuttavia poiché

$$a_{1,1}E_{1,1} + a_{2,2}E_{2,2} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

è chiaro che $E_{1,1}$ ed $E_{2,2}$ non sono sufficienti a generare $Sim_2(\mathbb{R})$: concludiamo che $\dim_{\mathbb{R}}(Sim_2(\mathbb{R})) \geq 3$ e, quindi, $\dim_{\mathbb{R}}(Sim_2(\mathbb{R})) = 3$.

Per costruire una base di $Sim_2(\mathbb{R})$ è sufficiente trovare allora tre matrici simmetriche linearmente indipendenti: due, $E_{1,1}$ ed $E_{2,2}$, le abbiamo già, quindi basta

determinare una terza matrice simmetrica che non sia in $\mathcal{L}(E_{1,1}, E_{2,2})$, cioè che non sia diagonale. Posto allora

$$\bar{E}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

segue che $\mathcal{B}' = (E_{1,1}, E_{2,2}, \bar{E}_{1,2})$ è base di $\text{Sim}_2(\mathbb{R})$. ♠

⚠ Vedremo più avanti che $\dim_K(\text{Sim}_n(K)) = \dim_K(\text{TS}_n(K)) = n(n+1)/2$. Si noti però che $\text{Sim}_n(K) \neq \text{TS}_n(K)$ pur avendo la stessa dimensione, infatti non è vero che due sottospazi della stessa dimensione coincidono!

16.3 Rango e dimensione

Proposizione 16.14. Siano $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{m,n}$ una matrice.

Posto

$$v_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n}) \in K^n, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$w_j = (a_{1,j}, \dots, a_{m,j}) \in K^m, \quad j = 1, \dots, n,$$

risulta

$$\text{rk}(A) = \dim_K(\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)) = \dim_K(\mathcal{L}(w_1, \dots, w_n)) = \text{rk}({}^t A).$$

Dimostrazione. Nel paragrafo 4.2 abbiamo definito il rango di una matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{m,n}$ come il numero di righe non nulle di una matrice $A' = (a'_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{m,n}$ ridotta per righe ed equivalente per righe ad A .

Per dimostrare la prima parte della tesi è sufficiente far vedere che ogni tipo di operazione elementare di riga, pur cambiando le righe di A , non muta il sottospazio che esse generano. Poiché esse coinvolgono al massimo due righe per volta, possiamo ridurci a studiare il caso $m = 2$.

È chiaro che $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots) = \mathcal{L}(v_2, v_1, \dots)$, cioè lo scambio di righe (operazione elementare E3) non muta la dimensione.

Poiché $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots$ se e solo se per ogni $\lambda \in K \setminus \{0\}$ si ha $v = \alpha_1 \lambda^{-1} (\lambda v_1) + \alpha_2 v_2 + \dots$, segue che $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots) = \mathcal{L}(\lambda v_1, v_2, \dots)$, cioè la moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo (operazione elementare E2) non muta la dimensione.

Infine $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots$ se e solo se per ogni $\lambda \in K$ si ha $v = \alpha_1 (v_1 + \lambda v_2) + (\alpha_2 - \lambda \alpha_1) v_2 + \dots$ e quindi $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots) = \mathcal{L}(v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots)$, cioè sommare ad una riga un multiplo di un'altra (operazione elementare E1) non muta la dimensione.

Posto $v'_i = (a'_{i,1}, \dots, a'_{i,n}) \in K^n$, $i = 1, \dots, m$, concludiamo che

$$\dim_K(\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)) = \dim_K(\mathcal{L}(v'_1, \dots, v'_m)) = \text{rk}(A') = \text{rk}(A).$$

Poiché le righe di ${}^t A$ coincidono con le colonne di A , il ragionamento fatto sopra dimostra anche che $\dim_K(\mathcal{L}(w_1, \dots, w_n)) = \text{rk}({}^t A)$.

Sia $r = \text{rk}(A)$. Allora è possibile estrarre dall'insieme v_1, \dots, v_m un sottoinsieme di r vettori linearmente indipendenti che generano $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$: per fissare le idee supponiamo che essi siano v_1, \dots, v_r . Allora abbiamo delle relazioni della forma

$$\begin{cases} v_i = v_i & \text{per } i = 1, \dots, r \\ v_{r+1} = \alpha_{r+1,1} v_1 + \alpha_{r+1,2} v_2 + \alpha_{r+1,3} v_3 + \dots + \alpha_{r+1,r} v_r \\ \vdots \\ v_m = \alpha_{m,1} v_1 + \alpha_{m,2} v_2 + \alpha_{m,3} v_3 + \dots + \alpha_{m,r} v_r. \end{cases}$$

Eguagliando le componenti j -esime al primo ed al secondo membro di tali equazioni, otteniamo

$$\begin{cases} a_{i,j} = a_{i,j} & \text{per } i = 1, \dots, r \\ a_{r+1,j} = \alpha_{r+1,1}a_{1,j} + \alpha_{r+1,2}a_{2,j} + \alpha_{r+1,3}a_{3,j} + \dots + \alpha_{r+1,r}a_{r,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} = \alpha_{m,1}a_{1,j} + \alpha_{m,2}a_{2,j} + \alpha_{m,3}a_{3,j} + \dots + \alpha_{m,r}a_{r,j}. \end{cases}$$

Posto

$$u_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, \alpha_{r+1,1}, \dots, \alpha_{m,1}),$$

$$u_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, \alpha_{r+1,2}, \dots, \alpha_{m,2}),$$

$$u_3 = (0, 0, 1, \dots, 0, \alpha_{r+1,3}, \dots, \alpha_{m,3}),$$

$$\vdots$$

$$u_r = (0, 0, 0, \dots, r, \alpha_{r+1,r}, \dots, \alpha_{m,r}),$$

segue allora che $w_j = a_{1,j}u_1 + a_{2,j}u_2 + a_{3,j}u_3 + \dots + a_{r,j}u_r$, cioè $\mathcal{L}(w_1, \dots, w_n) \subseteq \mathcal{L}(u_1, \dots, u_r)$, dunque

$$\text{rk}({}^tA) = \dim_K(\mathcal{L}(w_1, \dots, w_n)) \subseteq \dim_K(\mathcal{L}(u_1, \dots, u_r)) \leq r = \text{rk}(A).$$

Sostituendo ora A con tA e ripetendo il ragionamento otteniamo $\text{rk}(A) = \text{rk}({}^{tt}A) \leq \text{rk}({}^tA)$ sicché, in conclusione, risulta $\text{rk}(A) = \text{rk}({}^tA)$ e, perciò, la tesi è completamente dimostrata. \square

Osservazione 16.15. Quasi sempre la definizione di rango di una matrice viene data utilizzando la proprietà sopra, che non dipende dalla riduzione operata, dicendo che “il rango di $A \in K^{m,n}$ è la dimensione del suo spazio riga, cioè del sottospazio di K^n generato dalle sue righe, e del suo spazio colonna, cioè del sottospazio di K^m generato dalle sue colonne”.

Poiché tale dimensione si calcola a partire da una base dello spazio riga, cioè da un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti dello spazio riga, talvolta si dice anche che “il rango di $A \in K^{m,n}$ è il massimo numero di sue righe o colonne linearmente indipendenti”.

Vogliamo ora utilizzare la Proposizione 16.14, descrivendo un altro metodo per determinare basi di uno spazio vettoriale V finitamente generato su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ a partire da un suo insieme di generatori o di suoi vettori linearmente indipendenti.

A tale scopo fissiamo una base $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ di V e vettori $v_1, \dots, v_m \in V$. Supponiamo che $[v_i]_{\mathcal{B}} = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n}) \in K^n$ per $i = 1, \dots, m$. Poiché

$$[\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m]_{\mathcal{B}} = \alpha_1 [v_1]_{\mathcal{B}} + \dots + \alpha_m [v_m]_{\mathcal{B}},$$

allora v_1, \dots, v_m sono linearmente dipendenti se e solo la stessa proprietà vale per $[v_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [v_m]_{\mathcal{B}} \in K^n$. Quindi $\dim_K(\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m))$ coincide con il rango della matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ avente come riga i -esima le componenti del vettore v_i rispetto alla base \mathcal{B} fissata.

Illustriamo questa osservazione con un paio di esempi.

Esempio 16.16. In \mathbb{R}^5 siano dati i vettori $v_1 = (1, 1, 2, -1, 3)$, $v_2 = (2, -1, -1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 2, -1, 0, 1)$. Fissata la base canonica di \mathbb{R}^5 , la matrice A definita sopra è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che è ridotta per righe. Quindi v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. ♠

Esempio 16.17. Si considerino in $\mathbb{C}^{2,2}$ le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i-2 & i^{-1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} i/2 & -3 \\ i-2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1+2i \\ 3i-2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1+2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base di $\mathbb{C}^{2,2}$ definita nell'Esempio 15.8. Allora

$$[A_1]_{\mathcal{B}} = (1, 1+i, i-2, i^{-1}),$$

$$[A_2]_{\mathcal{B}} = (i/2, -3, i-2, 0),$$

$$[A_3]_{\mathcal{B}} = (0, -1+2i, 3i-2, 0),$$

$$[A_4]_{\mathcal{B}} = (0, 1+2i, 0, 0)$$

e la dimensione $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, A_4))$ coincide con il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & i-2 & i^{-1} \\ i/2 & -3 & i-2 & 0 \\ 0 & -1+2i & 3i-2 & 0 \\ 0 & 1+2i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è ridotta per righe: pertanto $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, A_4)) = 4 = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2,2})$. Quindi i vettori A_1, A_2, A_3, A_4 sono linearmente indipendenti e (A_1, A_2, A_3, A_4) è una base di $\mathbb{C}^{2,2}$. ♠

Quanto visto suggerisce un metodo per calcolare la dimensione del sottospazio generato da un insieme di vettori v_1, \dots, v_m linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V , determinarne una base e completarla a base di V .

Si può considerare la matrice A le cui righe sono le componenti dei vettori v_1, \dots, v_m rispetto ad una fissata base \mathcal{B} : per calcolare la dimensione ed una base del sottospazio $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$ basta allora ridurre per righe A ottenendo una matrice A' ridotta per righe e poi considerare i vettori di V le cui componenti rispetto a \mathcal{B} sono dati da tali righe.

Per completare tale base a base di V , in forza della Proposizione 16.14, basta aggiungere alle righe non nulle della matrice A' esattamente $\dim_K(V) - \text{rk}(A)$ righe non nulle in modo che la matrice finale abbia rango $\dim_K(V)$ e poi considerare i vettori di V aventi quelle righe come componenti rispetto alla base \mathcal{B} .

Esempio 16.18. È facile verificare che i vettori v_1, v_2, v_3, e_2, e_3 dell'Esempio 16.16 sono linearmente indipendenti. Infatti la matrice A definita sopra è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che è ridotta per righe ed ha rango 5. In particolare $(v_1, v_2, v_3, e_2, e_3)$ è base di \mathbb{R}^5 .

Ad un'analogia conclusione si giungerebbe scegliendo in luogo di e_2, e_3 altri vettori, purché la matrice risultante A rimanga ridotta per righe: per esempio possiamo scegliere $v_4 = (0, 1, 0, 0, -\pi)$ e $v_5 = (0, 0, 0, 0, 17/33)$. ♠

Qualora la matrice A non fosse ridotta per righe, si potrebbe procedere analogamente riducendola prima per righe e poi studiando la matrice A' così ottenuta: infatti ogni operazione di riga sulla matrice A equivale ad un'operazione sull'insieme dei vettori v_1, \dots, v_m che non cambia lo spazio $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$ ma solo l'insieme dei suoi generatori.

Esempio 16.19. In $\mathbb{R}^{2,2}$ si considerino le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo stabilire se A_1, A_2, A_3 sono linearmente indipendenti o meno e, nel caso lo siano, trovare una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ che li contenga.

Si consideri la base $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ di $\mathbb{R}^{2,2}$: allora

$$[A_1]_{\mathcal{B}} = (1, 1, 1, 1), \quad [A_2]_{\mathcal{B}} = (1, -2, 3, 1), \quad [A_3]_{\mathcal{B}} = (2, -1, 2, 1).$$

La matrice avente come righe le componenti di tali matrici rispetto alla base \mathcal{B} è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con operazioni elementari di riga otteniamo

$$A \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A'.$$

Le righe di A' sono le componenti rispetto a \mathcal{B} delle matrici

$$B_1 = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

che sono linearmente indipendenti, perchè le loro componenti rispetto a \mathcal{B} sono le righe non nulle di una matrice ridotta per righe, cioè A' .

Per determinare una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ contenente A_1, A_2, A_3 , è sufficiente determinare una matrice $A_4 \notin \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3)$. A tale scopo basta determinare una matrice A_4 tale che

$$\begin{aligned} [A_4]_{\mathcal{B}} &\notin \mathcal{L}((1, 1, 1, 1), (1, -2, 3, 1), (2, -1, 2, 1)) \\ &= \mathcal{L}((1, 1, 1, 1), (1, -2, 1, 0), (0, -3, 2, 0)). \end{aligned}$$

Per fare questo è sufficiente determinare una matrice 4×4 di rango 4 e le cui prime tre righe coincidano con le righe di A' , per esempio

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi scegliamo $A_4 = E_{1,2}$ e $\mathcal{B}' = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ è la base richiesta di $\mathbb{R}^{2,2}$. ♠

Esempio 16.20. Si consideri l'insieme $K[x]$ dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti in K : nell'Esempio 14.8 abbiamo visto che esso è uno spazio vettoriale non finitamente generato. Il motivo è che il grado di un polinomio può essere "grande" a piacere; per ovviare a tale problema, per ogni $n \geq 0$, si può introdurre il sottoinsieme

$$K[x]_n = \{ p(x) \in K[x] \mid \deg(p) \leq n \}.$$

Osserviamo che $K[x]_n$ è un sottospazio vettoriale di $K[x]$: infatti il polinomio nullo (che, per definizione, ha grado $-\infty$) è in $K[x]_n$ per ogni $n \geq 0$. Inoltre la somma di due polinomi di grado non maggiore di n è ancora un polinomio di grado non maggiore di n e il prodotto di un polinomio di grado non maggiore di n per uno scalare $\lambda \in K$ è ancora un polinomio di grado non maggiore di n .

Rispetto a $K[x]$, il sottospazio $K[x]_n$ ha il vantaggio di essere finitamente generato. Infatti se $p(x) \in K[x]_n$ si ha

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

ove $a_i \in K$ per $i = 0, \dots, n$. Concludiamo che

$$K[x]_n = \mathcal{L}(1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n) \subseteq K[x].$$

Ci domandiamo quale sia la dimensione di $K[x]_n$ (come spazio vettoriale su K). Poiché per generare $K[x]_n$ bastano $n + 1$ suoi elementi, precisamente i monomi $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n$, risulta $\dim_K(K[x]_n) \leq n + 1$. Inoltre tali monomi sono linearmente indipendenti: infatti una loro combinazione lineare non è altro che un polinomio e, per definizione, un polinomio è nullo se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli! Concludiamo che $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n)$ è una base di $K[x]_n$, quindi $\dim_K(K[x]_n) = n + 1$.

Ogni altra base di $K[x]_n$ è costituita da $n + 1$ vettori. Per verificare che $n + 1$ polinomi in $K[x]_n$ formano una base basta verificare che sono linearmente indipendenti

per la Proposizione 16.7. Per esempio sia $a \in K$ e si consideri l'insieme ordinato di $n + 1$ polinomi

$$\mathcal{B}' = (1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^{n-1}, (x - a)^n).$$

Tali polinomi sono linearmente indipendenti poiché nessuno di loro è combinazione lineare dei precedenti: per convincersene basta osservare che il grado dell' h -esimo polinomio è $h - 1$.

Quindi se $p(x) \in K[x]_n$ esistono scalari a_0, \dots, a_n tali che

$$p(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_{n-1}(x - a)^{n-1} + a_n(x - a)^n :$$

questo è lo sviluppo di Taylor di $p(x)$ di punto iniziale a e, nel corso di Analisi, viene solitamente osservato che $a_0 = p(a)$ e $a_h = (d^h p(x)/dx^h)(a)$ per $h \geq 1$. ♠

Esempio 16.21. In $\mathbb{R}[x]_3$ si considerino i polinomi

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 + x + x^2 + x^3, & p_2(x) &= 1 - 2x + 3x^2, & p_3(x) &= x - 2x^3, \\ p_4(x) &= 2 + 4x^2 - x^3, & p_5(x) &= 3x - 2x^2 + x^3 : \end{aligned}$$

vogliamo stabilire se questi 5 polinomi sono linearmente indipendenti e, nel caso non lo siano, trovare una base di $W = \mathcal{L}(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x)) \subseteq \mathbb{R}[x]_3$.

Osserviamo subito che $\dim(\mathbb{R}[x]_3) = 4$, perciò cinque polinomi devono essere linearmente dipendenti per il Lemma 16.1.

Si consideri la base $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ di $\mathbb{R}[x]_3$. Allora

$$\begin{aligned} [p_1(x)]_{\mathcal{B}} &= (1, 1, 1, 1), & [p_2(x)]_{\mathcal{B}} &= (1, -2, 3, 0), & [p_3(x)]_{\mathcal{B}} &= (0, 1, 0, -2), \\ [p_4(x)]_{\mathcal{B}} &= (2, 0, 4, -1), & [p_5(x)]_{\mathcal{B}} &= (0, 3, -2, 1). \end{aligned}$$

La matrice avente come righe le componenti dei polinomi dati rispetto alla base \mathcal{B} è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Con operazioni elementari di riga otteniamo

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + 2R_2 \\ R_5 \rightarrow R_5 - 3R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_4 \rightarrow R_4 - R_3 \\ R_5 \rightarrow R_5 + R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A' \end{aligned}$$

Le righe di A' sono le componenti rispetto a \mathcal{B} dei polinomi

$$q_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \quad q_2(x) = x - 2x^3, \quad q_3(x) = 2x^2 - 7x^3$$

che sono linearmente indipendenti, perchè le loro componenti rispetto a \mathcal{B} sono le righe di una matrice ridotta per righe, cioè A' .

Inoltre si ha $W = \mathcal{L}(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x)) = \mathcal{L}(q_1(x), q_2(x), q_3(x))$. In particolare la terna $(q_1(x), q_2(x), q_3(x))$ è una base di W , dunque $\dim(W) = 3$ e $W \subset \mathbb{R}[x]_3$.

Chi si voglia convincere dell'uguaglianza

$$\mathcal{L}(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x)) = \mathcal{L}(q_1(x), q_2(x), q_3(x))$$

direttamente osservi che

$$q_1(x) = p_1(x), \quad q_2(x) = p_3(x), \quad q_3(x) = p_2(x) - p_1(x) + 3p_3(x)$$

quindi $q_1(x), q_2(x), q_3(x) \in \mathcal{L}(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x))$; ne deduciamo l'inclusione $\mathcal{L}(q_1(x), q_2(x), q_3(x)) \subseteq \mathcal{L}(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x))$.

Viceversa,

$$\begin{aligned} p_1(x) &= q_1(x), & p_2(x) &= q_3(x) + q_1(x) - 3q_2(x), & p_3(x) &= q_2(x), \\ p_4(x) &= q_3(x) + 2q_1(x) - 2q_2(x), & p_5(x) &= -q_3(x) + 3q_2(x) \end{aligned}$$

quindi $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x) \in \mathcal{L}(q_1(x), q_2(x), q_3(x))$: in particolare abbiamo l'inclusione $\mathcal{L}(q_1(x), q_2(x), q_3(x)) \supseteq \mathcal{L}(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x))$.

Per esercizio il lettore completi l'insieme $q_1(x), q_2(x), q_3(x)$ a base di $\mathbb{R}[x]_3$. ♠

16.4 La formula di Grassmann

Concludiamo la lezione con un ultimo risultato importante.

Proposizione 16.22 (Formula di Grassmann). *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Se $U, W \subseteq V$ sono sottospazi vettoriali finitamente generati allora*

$$\dim_K(U) + \dim_K(W) = \dim_K(U \cap W) + \dim_K(U + W). \quad (16.4.1)$$

Dimostrazione. Se U e W sono finitamente generati lo stesso vale per $U + W$, dalla Proposizione 14.10. Poiché $U \cap W$ è sottospazio di W che è finitamente generato, esso stesso è finitamente generato.

Sia (v_1, \dots, v_n) una base di $U \cap W$: in particolare $U \cap W = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$. Poiché $v_1, \dots, v_n \in U, W$ sono vettori linearmente indipendenti, per la Proposizione 15.9 li possiamo completare a basi di U e W rispettivamente; in altre parole, esistono $u_1, \dots, u_p \in U$ e $w_1, \dots, w_q \in W$ tali che $(v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_p)$ sia una base di U e $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_q)$ sia una base di W . In particolare $u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q \notin U \cap W = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$.

Ancora dalla Proposizione 14.10 i vettori $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q$ sono generatori di $U + W$. Verifichiamo che sono linearmente indipendenti: si consideri la relazione di dipendenza lineare

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_q w_q = 0_V.$$

Poiché $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p \in U$ e $-(\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_q w_q) \in W$ coincidono, essi appartengono a $U \cap W$: in particolare esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p = -(\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_q w_q) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Dall'uguaglianza $-(\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_q w_q) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ segue

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_q w_q = 0_V :$$

poiché $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_q)$ è una base di W si ha $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \gamma_1 = \cdots = \gamma_q = 0$, perciò $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p = - = 0_V$: d'altra parte $(v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_p)$ è una base di U , dunque si ha anche $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.

Concludiamo che $\dim_K(U) = n + p$, $\dim_K(W) = n + q$, $\dim_K(U \cap W) = n$ e $\dim_K(U + W) = n + p + q$, che implica la formula (16.4.1). \square

Osservazione 16.23. Se riscriviamo la Formula di Grassmann (16.4.1) come

$$\dim_K(U + W) = \dim_K(U) + \dim_K(W) - \dim_K(U \cap W),$$

segue che la dimensione della somma di due sottospazi è sempre minore o uguale alla somma delle dimensioni. L'uguaglianza vale se e solo se risulta $\dim_K(U \cap W) = 0$, se e solo se $U \cap W = \{0_V\}$. Quando questo accade, si parla di *somma diretta* di due sottospazi, e si indica con $U \oplus W$ (invece che solo $U + W$).

Esempio 16.24. Si considerino $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (1, -1, 0, 5)$, $v_3 = (2, 1, 3, 3)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1)$, $v_5 = (1, -1, 2, -5)$ in \mathbb{R}^4 e i sottospazi

$$V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3), \quad W = \mathcal{L}(v_4, v_5) \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Il lettore verifichi per esercizio che $\dim(V) = 3$ e $\dim(W) = 2$. Allora $V \cap W$ contiene vettori non nulli. Infatti applicando la formula di Grassmann

$$\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V + W) = 3 + 2 - \dim(V + W).$$

Poiché $V + W \subseteq \mathbb{R}^4$ si ha $\dim(V + W) \leq \dim(\mathbb{R}^4) = 4$, quindi $\dim(V \cap W) \geq 1$, quindi $V \cap W \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. \spadesuit

Esempio 16.25. Osserviamo che ogni matrice $A \in K^{n,n}$ può essere scritta come somma di una matrice triangolare superiore e di una matrice strettamente triangolare inferiore, cioè $K^{n,n} = TS_n(K) + STI_n(K)$. Poiché $TS_n(K) \cap STI_n(K) = 0_{n,n}$, dalla Proposizione 16.22 segue (si veda l'Esempio 16.12)

$$\begin{aligned} \dim_K(STI_n(K)) &= \dim_K(TS_n(K) \cap STI_n(K)) + \dim_K(TS_n(K)) + \dim_K(STI_n(K)) \\ &\quad - \dim_K(TS_n(K)) = 0 + n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2. \quad \spadesuit \end{aligned}$$