

# Lezione 14

## 14.1 Combinazioni lineari

**Definizione 14.1.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e siano  $v_1, \dots, v_n \in V$  vettori fissati.

Un vettore  $v \in V$  si dice *combinazione lineare* di  $v_1, \dots, v_n$  se esistono scalari  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  tali che

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

- Il sottoinsieme di  $V$  costituito dai vettori che sono combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_n$  si indica con  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ .
- L'insieme  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$  si dice *generato* da  $v_1, \dots, v_n$  ed i vettori  $v_1, \dots, v_n$  si dicono *generatori* di  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ .
- Se esistono  $v_1, \dots, v_n \in V$  tali che  $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ ,  $V$  si dice *finitamente generato*.

Per capire meglio il concetto di combinazione lineare prendiamo in considerazione alcuni esempi.

**Esempio 14.2.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e  $v_1, \dots, v_n \in V$  vettori fissati. Allora

$$0_V = 0v_1 + \dots + 0v_n,$$

ovvero il vettore nullo è sempre combinazione lineare di un qualsiasi insieme di vettori. ♠

**Esempio 14.3.** Fissato nello spazio ordinario  $S_3$  un sistema di riferimento  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ , per la Proposizione 7.12 ogni vettore geometrico  $\vec{v} \in V_3(O)$  si può decomporre come

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

per opportuni  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Quindi lo spazio  $V_3(O)$  coincide con  $\mathcal{L}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , ovvero  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sono generatori di  $V_3(O)$ : in particolare  $V_3(O)$  è finitamente generato. ♠

**Esempio 14.4.** In  $\mathbb{R}^3$  si considerino i vettori  $e_1 = (1, 0, 0)$  ed  $e_2 = (0, 1, 0)$ . Allora  $v' = (3, 2, 1) \notin \mathcal{L}(e_1, e_2)$ , cioè  $v'$  non è combinazione lineare di  $e_1, e_2$ . Infatti dall'equazione vettoriale

$$(3, 2, 1) = v' = \alpha e_1 + \beta e_2 = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0),$$

confrontando le componenti nelle stessa posizione dei vettori al primo ed al secondo membro otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \\ 0 = 1, \end{cases}$$

che, ovviamente, non ammette soluzioni. Quindi  $e_1$  ed  $e_2$  non sono generatori di  $\mathbb{R}^3$ .

Invece  $v'' = (3, 2, 0) \in \mathcal{L}(e_1, e_2)$  cioè  $v''$  è combinazione lineare di  $e_1, e_2$ . Infatti l'equazione vettoriale

$$(3, 2, 0) = v'' = \alpha e_1 + \beta e_2 = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0),$$

si traduce nel sistema

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \\ 0 = 0, \end{cases}$$

avente soluzione  $(\alpha, \beta) = (3, 2)$ .

Più in generale gli elementi di  $\mathcal{L}(e_1, e_2)$ , cioè i vettori che sono combinazione lineare di  $e_1$  ed  $e_2$ , sono tutti e soli i vettori del tipo  $(\alpha, \beta, 0)$  al variare di  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , cioè

$$\mathcal{L}(e_1, e_2) = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \}.$$

Verificare per esercizio che  $\mathcal{L}(e_1, e_2)$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ . ♠

**Esempio 14.5.** In  $\mathbb{R}^3$  si considerino  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  e  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Ogni vettore di  $\mathbb{R}^3$  è combinazione lineare di  $e_1, e_2, e_3$ : infatti

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1),$$

quindi  $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$ , cioè  $e_1, e_2, e_3$  generano  $\mathbb{R}^3$ , che risulta essere  $\mathbb{R}^3$  è finitamente generato.

Più in generale, sia  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , e si considerino i vettori  $e_1, \dots, e_n$  in  $K^n$  così definiti:  $e_i$  ha tutte le componenti nulle tranne la  $i$ -esima che vale 1. Allora  $e_1, \dots, e_n$  sono generatori di  $K^n$ . Infatti scelto  $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$  si ha

$$\begin{aligned}
& x_1(1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0) + \\
& x_2(0, 1, 0, 0, \dots, 0, 0) + \\
& x_3(0, 0, 1, 0, \dots, 0, 0) + \\
& \quad \vdots \\
& x_{n-1}(0, 0, 0, \dots, 1, 0) + \\
& x_n(0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1) = \\
\hline
& (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)
\end{aligned}$$

cioè  $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ . Quindi  $K^n = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_n)$  è finitamente generato. ♠

**Esempio 14.6.** In  $\mathbb{C}^{2,2}$  si considerino i vettori

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha che

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{1,2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{2,1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{2,2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

quindi  $\mathbb{C}^{2,2} = \mathcal{L}(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ , ovvero  $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$  sono generatori di  $\mathbb{C}^{2,2}$ , che risulta essere  $\mathbb{C}^{2,2}$  finitamente generato.

Più in generale, in  $K^{m,n}$  si consideri per ogni coppia di indici  $(i, j)$ , con  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ , la matrice  $E_{i,j}$  avente tutte le entrate nulle tranne quella in posizione  $(i, j)$  che vale 1. Allora le matrici  $E_{i,j}$  con  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$  sono generatori di  $K^{m,n}$ , cioè  $K^{m,n} = \mathcal{L}(E_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ . In particolare  $K^{m,n}$  è finitamente generato. ♠

**Osservazione 14.7.** In tutti gli esempi presi in considerazione finora la scrittura di un fissato vettore come combinazione lineare di generatori dati è unica. Non è detto che questo accada sempre, cioè uno stesso vettore può essere scritto in più di un modo come combinazione lineare di un fissato insieme di vettori.

Per esempio, se consideriamo  $v_1 = (1, 1, -1)$ ,  $v_2 = (2, -3, 0)$ ,  $v_3 = (-3, 2, 1)$  in  $\mathbb{R}^3$ , allora

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (0, 0, 0) = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3.$$

Il lettore verifichi per esercizio che il vettore  $0_{\mathbb{R}^3}$  si scrive in infiniti modi come combinazione lineare dei vettori  $v_1, v_2, v_3$ .

Vediamo adesso che non tutti gli spazi vettoriali sono finitamente generati.

**Esempio 14.8.** Si consideri l'insieme  $K[x]$  dei polinomi nella variabile  $x$  a coefficienti in  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Si ricordi che ogni polinomio si può scrivere in maniera unica come

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (14.1.1)$$

dove gli esponenti della variabile  $x$  sono ordinati in maniera strettamente crescente (in particolare sono tutti diversi) e i coefficienti  $a_i \in K$ . Tale scrittura viene detta *forma ridotta del polinomio*.

Mostriamo che  $K[x]$  è uno spazio vettoriale su  $K$  con l'usuale operazione di somma di polinomi e di prodotto di un polinomio per una costante in  $K$ .

Infatti  $K[x] \neq \emptyset$  poiché contiene tutti i polinomi costanti, in particolare il polinomio nullo. Inoltre le operazioni di somma e prodotto si possono definire a partire dalla successione dei coefficienti del polinomio, utilizzando le operazioni di somma e prodotto definite in  $K$ . Per esempio, se il polinomio  $p(x)$  ha forma ridotta data da (14.1.1), allora

$$\alpha p(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \alpha a_3 x^3 + \cdots + \alpha a_n x^n + \dots$$

Poiché la somma ed il prodotto di elementi di  $K$  soddisfano gli otto assiomi della definizione 13.1, anche le operazioni di somma e prodotto in  $K[x]$  soddisfano le stesse proprietà.

Si noti che in  $K[x]$  si possono considerare polinomi formati da un solo addendo, cioè polinomi della forma  $p(x) = ax^n$ , dove  $a \in K$  ed  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$ : tali polinomi particolari si dicono *monomi nell'indeterminata  $x$* .

Se  $a \neq 0$ , si definisce *grado* di  $ax^n$  il numero  $\deg(ax^n) = n$ , mentre se  $a = 0$  si pone  $\deg(0) = -\infty$ . Un polinomio nell'indeterminata  $x$  è, dunque, una qualsiasi somma finita di monomi: il grado  $\deg(p)$  di un polinomio  $p(x)$  è il grado massimo dei monomi con coefficiente non nullo che compaiono quando è scritto in forma ridotta. Si noti che

$$\deg(p + q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}, \quad \deg(\alpha p) \leq \deg(p)$$

per ogni  $\alpha \in K$  e per ogni  $p(x), q(x) \in K[x]$ .

Verifichiamo che  $K[x]$  non è finitamente generato. Consideriamo un qualsiasi insieme finito di polinomi  $p_1(x), \dots, p_n(x) \in K[x]$  e sia

$$d = \max\{\deg(p_i) \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Allora se  $p(x) \in \mathcal{L}(p_1(x), \dots, p_n(x)) \subseteq K[x]$  segue che  $\deg(p) \leq d$ , dunque, comunque si scelgano  $p_1(x), \dots, p_n(x) \in K[x]$ , i polinomi di grado strettamente maggiore di  $d$  non sono loro combinazione lineare.

Altri esempi di spazi non finitamente generati sono gli spazi di funzioni  $\mathbb{R}^I, \mathcal{C}^p(I)$ ,  $p \geq 0$ , ove  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo aperto. Infatti, per esempio, si consideri  $\mathbb{R}[x]$  come sottospazio di  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathcal{C}^p(\mathbb{R})$  con la naturale identificazione di un polinomio con la funzione polinomiale corrispondente: vedremo più avanti che se  $V$  è uno spazio vettoriale finitamente generato allora tali sono tutti i suoi sottospazi. Poiché  $\mathbb{R}[x]$  non è finitamente generato allora né  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , né  $\mathcal{C}^p(\mathbb{R})$  possono esserlo. ♠

In tutti gli esempi presi in esame sopra, l'insieme generato da un certo numero di vettori di uno spazio vettoriale  $V$  viene ad essere, di fatto, un sottospazio vettoriale di  $V$ , eventualmente coincidente con  $V$  stesso: questo è un fatto del tutto generale.

**Proposizione 14.9.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e  $v_1, \dots, v_n \in V$  vettori fissati. Allora l'insieme  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ , inoltre

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = \mathcal{L}(v_1) + \dots + \mathcal{L}(v_n). \quad (14.1.2)$$

*Dimostrazione.* Iniziamo a verificare la prima parte dell'enunciato nel caso  $n = 1$ . In questo caso le combinazioni lineari di  $v_1$  sono esattamente i vettori della forma  $\alpha_1 v_1$  al variare di  $\alpha_1 \in K$ , cioè i multipli di  $v_1$ . In particolare  $0_V = 0v_1 \in \mathcal{L}(v_1)$ . Se poi consideriamo  $\alpha'_1 v_1, \alpha''_1 v_1 \in \mathcal{L}(v_1)$ , si ha

$$\alpha'_1 v_1 + \alpha''_1 v_1 = (\alpha'_1 + \alpha''_1) v_1 \in \mathcal{L}(v_1).$$

Infine, se consideriamo  $\alpha \in K$  e  $\alpha_1 v_1 \in \mathcal{L}(v_1)$ , si ha

$$\alpha(\alpha_1 v_1) = (\alpha\alpha_1) v_1 \in \mathcal{L}(v_1).$$

Concludiamo che  $\mathcal{L}(v_1)$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

Osserviamo che gli elementi di  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$  sono tutti e soli i vettori della forma  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ : poiché  $\alpha_i v_i \in \mathcal{L}(v_i)$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ , segue l'identità (14.1.2). Poiché, quindi,  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$  è somma di sottospazi vettoriali di  $V$ , esso è a sua volta sottospazio vettoriale di  $V$  per la Proposizione 13.27.  $\square$

Per tale motivo, d'ora in avanti chiameremo  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$  il sottospazio vettoriale di  $V$  generato dai vettori  $v_1, \dots, v_n$ .

Mostriamo adesso che se conosciamo gli insiemi di generatori di due sottospazi, siamo anche in grado di determinare un insieme di generatori per la loro somma.

**Proposizione 14.10.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e siano  $W', W'' \subseteq V$  sottospazi finitamente generati. Allora anche il sottospazio somma  $W' + W''$  è finitamente generato. Inoltre se

$$W' = \mathcal{L}(w'_1, \dots, w'_{n'}), \quad W'' = \mathcal{L}(w''_1, \dots, w''_{n''}),$$

allora

$$W' + W'' = \mathcal{L}(w'_1, \dots, w'_{n'}, w''_1, \dots, w''_{n''}).$$

*Dimostrazione.* Utilizzando ripetutamente la formula (14.1.2) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(w'_1, \dots, w'_{n'}) + \mathcal{L}(w''_1, \dots, w''_{n''}) &= \mathcal{L}(w'_1) + \dots + \mathcal{L}(w'_{n'}) + \mathcal{L}(w''_1) + \dots + \mathcal{L}(w''_{n''}) \\ &= \mathcal{L}(w'_1, \dots, w'_{n'}, w''_1, \dots, w''_{n''}), \end{aligned}$$

e ciò dimostra completamente l'enunciato.  $\square$

Concludiamo che un insieme di generatori per la somma di sottospazi finitamente generati è l'unione di insiemi di generatori per ciascuno dei sottospazi.

## 14.2 Dipendenza lineare

**Definizione 14.11.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e si considerino  $v_1, \dots, v_n \in V$  vettori fissati.

I vettori  $v_1, \dots, v_n$  si dicono *linearmente dipendenti* se esistono  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V. \quad (14.2.1)$$

In caso contrario i vettori  $v_1, \dots, v_n$  si dicono *linearmente indipendenti*.

Quindi dei vettori  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti se, per ogni scelta di scalari  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  non tutti nulli, risulta

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \neq 0_V.$$

Un altro modo per definire la nozione di indipendenza lineare è il seguente: i vettori  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti se l'equazione in  $V$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$$

ha  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0_{K^n} \in K^n$  come unica soluzione, mentre sono linearmente dipendenti se ha soluzioni non nulle.

**Esempio 14.12.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e si considerino vettori  $v_1, \dots, v_n$ . Allora

$$1 \cdot 0_V + 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = 0_V,$$

cioè  $0_V, v_1, v_2, \dots, v_n$  sono linearmente dipendenti. In particolare, un qualsiasi insieme di vettori che contiene il vettore nullo è costituito da vettori linearmente dipendenti.

Più in generale siano  $v_1, \dots, v_n \in V$  linearmente dipendenti e  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  non tutti nulli tali che  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$ : pertanto nella relazione di dipendenza lineare

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + 0v_{n+1} + \dots + 0v_m = 0_V$$

non tutti gli scalari sono nulli, quindi anche  $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_m$  sono linearmente dipendenti, qualsiasi sia la scelta dei vettori  $v_{n+1}, \dots, v_m \in V$ . ♠

**Esempio 14.13.** Fissato nello spazio ordinario  $S_3$  un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ , i tre versori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sono linearmente indipendenti in  $V_3(O)$ : infatti vale che  $\vec{0} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  se e solo se  $0 = |\vec{0}| = |a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ , ovvero se e solo se  $a = b = c = 0$ . ♠

**Esempio 14.14.** I tre vettori  $v_1 = (1, 1, -1)$ ,  $v_2 = (2, -3, 0)$ ,  $v_3 = (-3, 2, 1)$  sono linearmente dipendenti in  $\mathbb{R}^3$  poiché

$$1(1, 1, -1) + 1(2, -3, 0) + 1(-3, 2, 1) = (0, 0, 0).$$

Invece i vettori  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$  sono linearmente indipendenti poiché

$$\alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

che è nullo se e solo se  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

Più in generale, in  $K^n$  i vettori  $e_1, \dots, e_n$  sono linearmente indipendenti. Lo stesso vale per i vettori  $E_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  in  $K^{m,n}$ . ♠

**Osservazione 14.15.** Le definizioni di dipendenza ed indipendenza lineare non dipendono dall'ordine dei vettori: se dei vettori sono linearmente dipendenti od indipendenti in un fissato ordine, lo sono in qualsiasi altro.

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e siano  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Ci domandiamo cosa significhi che uno, due o tre vettori siano linearmente dipendenti.

- Dire che il vettore  $v_1$  è linearmente dipendente equivale ad affermare che esiste  $\alpha_1 \in K \setminus \{0\}$  tale che  $\alpha_1 v_1 = 0_V$ . Per la legge di annullamento del prodotto ciò significa che  $v_1 = 0_V$ : quindi *un vettore è linearmente dipendente se e solo se è nullo*.
- Dire che  $v_1$  e  $v_2$  sono linearmente dipendenti equivale ad affermare che esistono scalari  $\alpha_1, \alpha_2 \in K$  non contemporaneamente nulli tali che

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_V.$$

Supponiamo che sia  $\alpha_2 \neq 0$ . Allora, sommando ad ambo i membri della relazione sopra l'opposto di  $\alpha_1 v_1$  e moltiplicando quindi ambo i membri per  $\alpha_2^{-1}$  (che esiste perché  $\alpha_2 \neq 0$ ), si ottiene

$$v_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} v_1,$$

cioè uno dei vettori è multiplo dell'altro (cioè è sua combinazione lineare). Viceversa, se ciò accade, diciamo

$$v_2 = \lambda v_1$$

per qualche  $\lambda \in K$ , allora sommando ad ambo i membri l'opposto di  $\lambda v_1$  si ottiene la relazione di dipendenza lineare

$$(-\lambda)v_1 + 1v_2 = 0_V,$$

i cui coefficienti non sono tutti nulli (infatti  $1 \neq 0$ ): quindi *due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno dei due è multiplo dell'altro*.

- Dire che  $v_1, v_2$  e  $v_3$  sono linearmente dipendenti equivale ad affermare che esistono  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$  non contemporaneamente nulli tali che

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_V.$$

Supponiamo che sia  $\alpha_3 \neq 0$ . Allora sommando ad ambo i membri della relazione sopra l'opposto di  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$  e moltiplicando quindi ambo i membri per  $\alpha_3^{-1}$  (che esiste perché  $\alpha_3 \neq 0$ ), si ottiene

$$v_3 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} v_2,$$

cioè uno dei vettori è combinazione lineare dei rimanenti. Viceversa, se ciò accade, diciamo

$$v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

per qualche  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ , sommando ad ambo i membri l'opposto di  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$  si ottiene la relazione di dipendenza lineare

$$(-\lambda_1)v_1 + (-\lambda_2)v_2 + 1v_3 = 0_V,$$

i cui coefficienti non sono tutti nulli (infatti  $1 \neq 0$ ): quindi *tre vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno di loro è combinazione lineare dei rimanenti*.

**Esempio 14.16.** In  $\mathbb{R}^3$  consideriamo i vettori  $v_1 = (1, 1, -1)$ ,  $v_2 = (2, -3, 0)$  e  $v_3 = (-3, 2, 1)$  dell'Esempio 14.14: i tre vettori sono linearmente dipendenti e si ha

$$(-1)(1, 1, -1) + (-1)(2, -3, 0) = (-3, 2, 1). \quad \spadesuit$$

Il ragionamento che abbiamo appena fatto, con le modifiche del caso, è alla base della dimostrazione del risultato seguente.

**Proposizione 14.17.** Siano  $V$  uno spazio vettoriale su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e  $v_1, \dots, v_n \in V$  vettori fissati,  $n \geq 2$ .

- (i) I vettori  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente dipendenti se e solo se uno di loro è combinazione lineare dei rimanenti.  
 (ii) I vettori  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente dipendenti se e solo se uno di loro è combinazione lineare di quelli che lo precedono nell'ordine fissato.

*Dimostrazione.*

- (i) I vettori  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente dipendenti se e solo se esistono scalari  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  non contemporaneamente nulli tali che

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V;$$

se, per fissare le idee,  $\alpha_n \neq 0$  si ottiene

$$v_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} v_{n-1},$$

cioè uno dei vettori è combinazione lineare dei rimanenti.

Viceversa, se ciò accade, diciamo

$$v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$$

per qualche  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in K$ , si ottiene la relazione di dipendenza lineare

$$(-\lambda_1)v_1 + \dots + (-\lambda_{n-1})v_{n-1} + 1v_n = 0_V,$$

i cui coefficienti non sono tutti nulli, quindi  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente dipendenti.

- (ii) È chiaro che se esiste  $m$  tale che  $v_m \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{m-1})$  allora i vettori sono linearmente dipendenti dalla parte (i) dell'enunciato. Viceversa, supponiamo che  $v_1, \dots, v_n$  siano linearmente dipendenti e sia

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$$

una loro relazione di dipendenza lineare a coefficienti  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  non tutti nulli. Poniamo

$$m = \max\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \alpha_i \neq 0\}:$$

ciò significa che nella relazione di dipendenza lineare  $\alpha_i = 0$  per  $i \geq m+1$ . Quindi tale relazione di dipendenza lineare è del tipo

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0_V$$

con  $\alpha_m \neq 0$ : per quanto visto sopra

$$v_m = -\frac{\alpha_1}{\alpha_m} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} v_{m-1},$$

ovvero  $v_m \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{m-1})$ . □