

Esercizio 2. Discutere e risolvere, se possibile, i seguenti sistemi al variare di $h, k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + hz = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x - y = 1 \\ hx - 2y - 2z = k. \end{cases}$$

Svolgimento. Procediamo con operazioni elementari di riga sulla matrice incompleta A_h del primo sistema:

$$A_h := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2/4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Risulta $\rho(A_1) = 2$ e $\rho(A_h) = 3$ per $h \neq 1$. Quindi se $h = 1$ il sistema ha ∞^1 soluzioni che formano uno spazio vettoriale poiché il sistema è omogeneo, mentre se $h \neq 1$ il sistema ha come unica soluzione quella banale.

Si noti che se $h = 1$ il sistema coincide con il primo dei sistemi dell'esercizio 1, perciò il suo insieme delle soluzioni è

$$V := \{ (-a, -5a, 4a) \mid a \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((-1, -5, 4)).$$

Procediamo ora con operazioni elementari di riga sulla matrice completa del secondo sistema. Definiamo

$$A_h := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ h & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_k := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}.$$

Allora:

$$(A_h|B_k) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ h & -2 & -2 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1, R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ h & -2 & -2 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ h-2 & -2 & 0 & k+4 \end{pmatrix}.$$

Quindi il secondo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ z = 1 \\ -y - z = 2. \end{cases}$$

Risulta $\rho(A_2) = \rho(A_2|B_{-4}) = 2$, $2 = \rho(A_2) \neq \rho(A_2|B_k) = 3$ per $k \neq -4$ ed infine $\rho(A_h) \neq \rho(A_h|B_k) = 3$ per $h \neq 2$.

Dal teorema di Rouché-Capelli ricaviamo allora le seguenti conseguenze. Se $h \neq 2$ il sistema ammette un'unica soluzione. Precisamente

$$((k+4)/(h-2), 1 + (k+4)/(h-2), 1).$$

Se $h = 2$ ma $k \neq -4$ il sistema non ammette soluzione. Infine se $h = 2$, $k = -4$ il sistema ammette un insieme di ∞^1 soluzioni della forma

$$V := \{ (x, 1+x, 1) \mid x \in \mathbb{R} \} = (0, 1, 1) + \mathcal{L}((1, 1, 0)).$$