

Lezione 24

24.1 Coniche e loro riduzione a forma canonica

Fissiamo nel piano un sistema di riferimento Oxy e consideriamo un polinomio di grado 2 in x, y a meno di costanti moltiplicative non nulle, diciamo

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

($a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$). Nella precedente lezione ci siamo posti il problema di descrivere il luogo geometrico (eventualmente vuoto)

$$\mathcal{C} = \{ P = (x, y) \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \}$$

ed abbiamo visto che tale luogo può essere un'ellisse, un'iperbole, una parabola (coniche classiche) o qualcos'altro.

Per tale motivo è opportuno introdurre la seguente definizione.

Definizione 24.1 (Coniche). Una *conica* \mathcal{C} nel piano (rispetto ad un fissato sistema di riferimento Oxy) è il dato, a meno di costanti moltiplicative non nulle, di un'equazione della forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ e a, b, c non simultaneamente nulli.

Se \mathcal{C} è la conica $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, molto spesso, nel seguito, utilizzeremo la locuzione *la conica \mathcal{C} di equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$* .

Nella lezione precedente abbiamo studiato come cambia l'equazione di una conica (nel senso della definizione sopra) quando operiamo nel piano una rototraslazione: la "nuova" equazione si ottiene sostituendo alle "vecchie" variabili la loro espressione in funzione di "nuove" variabili.

Vediamo cosa si può dire nel caso specifico delle coniche. Come prima cosa osserviamo che l'equazione di cui sopra si può sempre scrivere nella forma

$$a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2 + 2a_{1,3}x + 2a_{2,3}y + a_{3,3} = 0 \quad (24.1.1)$$

per opportuni $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ (sarà chiara fra poco la maggiore convenienza di una tale notazione rispetto alla precedente). Vorremmo trovare un sistema di riferimento $O'x'y'$ nel piano con coordinate x', y' in modo tale che l'equazione (23.1.1) divenga più semplice e, soprattutto, riconoscibile: per esempio potremmo desiderare d'avere un'equazione *canonica* nel senso della seguente definizione.

Definizione 24.2 (Forma canonica di una conica). Nel piano sia fissato un sistema di riferimento Oxy e sia \mathcal{C} una conica. Diciamo che \mathcal{C} è in *forma canonica* (o che Oxy è un *sistema di riferimento canonico* per \mathcal{C}) se l'equazione di \mathcal{C} è della forma

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma, \quad (24.1.2)$$

oppure

$$\beta y^2 = 2\gamma x \quad (24.1.3)$$

per qualche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo, quindi, di capire come fare per passare dal “vecchio riferimento” Oxy ad un “nuovo riferimento” $O'x'y'$ rispetto a cui \mathcal{C} sia in forma canonica.

Per individuare l'angolo di rotazione φ e l'origine O' del nuovo sistema di riferimento faremo uso della teoria delle forme quadratiche vista in precedenza. Infatti all'equazione (24.1.1) si possono associare facilmente le due forme quadratiche

$$a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2, \quad a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2 + 2a_{1,3}xt + 2a_{2,3}yt + a_{3,3}t^2$$

le cui matrici (simmetriche) sono, rispettivamente,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

dette rispettivamente *matrice dei termini di secondo grado della conica* e *matrice (completa) della conica*. Osserviamo che si ha

$$(x \ y \ 1) B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2 + 2a_{1,3}x + 2a_{2,3}y + a_{3,3}. \quad (24.1.4)$$

Esempio 24.3. Nel piano con fissato sistema di riferimento Oxy si consideri la conica \mathcal{C} di equazione

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x = 0.$$

La matrice dei termini di secondo grado di \mathcal{C} e la matrice completa di \mathcal{C} sono rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \spadesuit$$

Sia ora $O'x'y'$ un nuovo sistema di riferimento nel piano legato ad Oxy da una certa rototraslazione della forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

(si veda la Proposizione 23.6) e supponiamo che \mathcal{C} sia rappresentata rispetto a tale sistema dall'equazione

$$(x' \ y' \ 1) B' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (24.1.5)$$

Qual è allora il legame tra le matrici B e B' nelle equazioni (24.1.4) e (24.1.5)? La rototraslazione di cui sopra si può scrivere in forma compatta come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & u \\ \sin \varphi & \cos \varphi & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sostituendo tale formula nelle (24.1.4) e (24.1.5) otteniamo il seguente risultato.

Proposizione 24.4. *Nel piano siano fissati due sistemi di riferimento Oxy e $O'x'y'$. Si assuma che il semiasse positivo delle x' formi un angolo φ (misurato in senso antiorario) con il semiasse positivo delle x e che le coordinate di O' rispetto al sistema di riferimento Oxy siano (u, v) . Poniamo*

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & u \\ \sin \varphi & \cos \varphi & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Sia poi \mathcal{C} una conica avente nei due sistemi di riferimento matrici complete B e B' e matrici dei termini di grado 2 A ed A' rispettivamente.

Allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ non nullo tale che $\lambda B' = {}^tQBQ$ e $\lambda A' = {}^tPAP$.

Data una conica \mathcal{C} di equazione (24.1.1), per determinare una sua equazione canonica si può dunque procedere come segue.

Si determina prima una matrice ortogonale speciale che diagonalizzi la matrice A del complesso dei termini di secondo grado: in questo modo l'equazione di \mathcal{C} viene trasformata in una della forma

$$\widehat{a}_{1,1}\widehat{x}^2 + \widehat{a}_{2,2}\widehat{y}^2 + 2\widehat{a}_{1,3}\widehat{x} + 2\widehat{a}_{2,3}\widehat{y} + \widehat{a}_{3,3} = 0.$$

Ciò equivale a una rotazione che ci fa passare dal vecchio sistema di riferimento Oxy ad un sistema di riferimento ausiliario $O\widehat{x}\widehat{y}$.

A questo punto con trasformazioni del tipo $(\widehat{x}, \widehat{y}) \mapsto (x' + a, y' + b)$ (cioè *formando i quadrati*: è il metodo con cui si risolvono le equazioni di secondo grado!) si fa in modo che scompaiano il massimo numero di monomi di grado 1 e, eventualmente, il termine noto. L'equazione risultante diviene

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 = \gamma,$$

se $\det(A) \neq 0$, oppure

$$\beta y'^2 = 2\gamma x',$$

se $\det(A) = 0$, dunque è in forma canonica. Ciò equivale a una traslazione che ci fa passare dal sistema di riferimento ausiliario $O\widehat{x}\widehat{y}$ al nuovo sistema di riferimento $O'x'y'$.

Illustriamo quanto visto con un esempio dettagliato.

Esempio 24.5. Consideriamo la conica \mathcal{C} dell'Esempio 24.3 di equazione

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x = 0, \quad (24.1.6)$$

con matrici associate

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{vmatrix} = t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4),$$

quindi gli autovalori di A sono 2 e 4. L'autospazio $E_A(2)$ si determina risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

calcoliamo che $E_A(2) = \mathcal{L}((1, -1))$. Poiché sappiamo che l'autospazio relativo all'altro autovalore 4 contiene autovettori non nulli (per definizione) ortogonali agli autovettori di $E_A(2)$ (perché A è simmetrica: si veda la Proposizione 22.1), sappiamo che l'autospazio $E_A(4) = \mathcal{L}((1, 1))$.

Quindi la matrice ortogonale speciale cercata è

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

e la rotazione corrispondente è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}/2\hat{x} + \sqrt{2}/2\hat{y} \\ y = -\sqrt{2}/2\hat{x} + \sqrt{2}/2\hat{y}. \end{cases}$$

La conica \mathcal{C} nel sistema di riferimento ausiliare $O\hat{x}\hat{y}$ ha matrice dei termini di secondo grado

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Per determinare i monomi di grado 1 nella sua equazione relativa a $O\hat{x}\hat{y}$ basta sostituire nell'equazione (24.1.6) le espressioni di x ed y in funzione di \hat{x} e \hat{y} nei monomi di grado 1. Quindi la sua equazione è

$$2\hat{x}^2 + 4\hat{y}^2 + 2\hat{x} + 2\hat{y} = 0.$$

Si noti che

$$2\hat{x}^2 + 2\hat{x} = 2(\hat{x}^2 + \hat{x}) = 2((\hat{x} + 1/2)^2 - 1/4) = 2(\hat{x} + 1/2)^2 - 1/2,$$

$$4\widehat{y}^2 + 2\widehat{y} = 4(\widehat{y}^2 + \widehat{y}/2) = 4((\widehat{y} + 1/4)^2 - 1/16) = 4(\widehat{y} + 1/4)^2 - 1/4.$$

Ponendo $x' = \widehat{x} + 1/2$ e $y' = \widehat{y} + 1/4$, l'equazione di \mathcal{C} rispetto al sistema di riferimento $O'x'y'$ diviene

$$2x'^2 + 4y'^2 - 3/4 = 0,$$

che è un'equazione canonica. Moltiplicando ambo i membri per $4/3$ otteniamo infine l'equazione

$$\frac{8}{3}x'^2 + \frac{16}{3}y'^2 = 1. \quad (24.1.7)$$

Deduciamo che \mathcal{C} è un'ellisse di semiassi $\sqrt{3/8}$ e $\sqrt{3/16}$.

Le equazioni della rototraslazione che trasforma l'equazione (24.1.6) nell'equazione (24.1.7) sono

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\sqrt{2}/8 \\ \sqrt{2}/8 \end{pmatrix}. \quad (24.1.8)$$

Il centro di \mathcal{C} è il punto che, del nuovo sistema di riferimento, è l'origine. Quindi è il punto che ha coordinate $(0, 0)$ rispetto a $O'x'y'$. Dalle equazioni (24.1.8) deduciamo allora che il centro di \mathcal{C} ha coordinate $(-3\sqrt{2}/8, \sqrt{2}/8)$ rispetto a Oxy .

Gli assi di \mathcal{C} sono le rette che, del nuovo sistema di riferimento, sono gli assi coordinati. Quindi sono le rette di equazioni $x' = 0$ e $y' = 0$ rispetto a $O'x'y'$. Dalle equazioni (24.1.8) deduciamo che

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix},$$

dunque gli assi della conica \mathcal{C} sono le rette di equazione $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 1 = 0$ e $2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 1 = 0$ rispetto a Oxy .

In maniera simile il lettore determini le coordinate dei vertici di \mathcal{C} rispetto a Oxy .

Per disegnare \mathcal{C} , oltre alle informazioni già determinate, può essere utile calcolare le intersezioni con gli assi x ed y . Per calcolare le intersezioni di \mathcal{C} con l'asse delle ordinate risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $(0, 0)$. Le intersezioni con l'asse delle ascisse sono invece date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

cioè $(0, 0)$ e $(-2\sqrt{2}/3, 0)$.

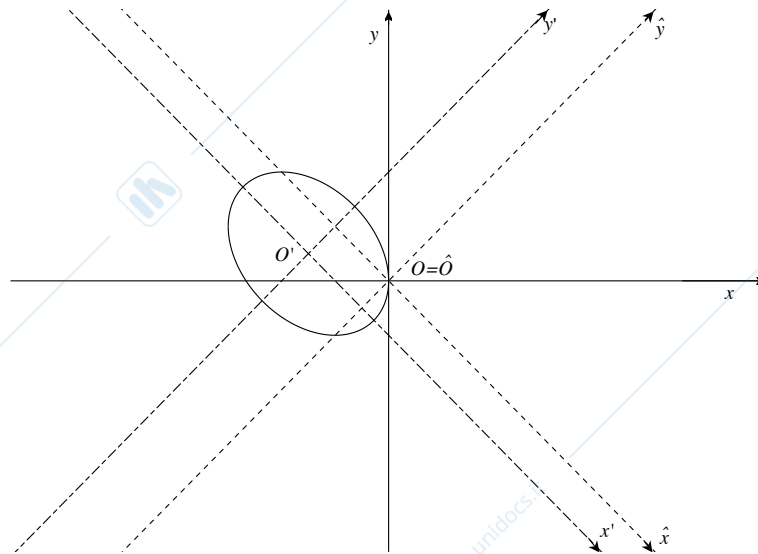


Figura 24.1

In Figura 24.1 abbiamo riportato il disegno della conica \mathcal{C} . ♠

24.2 Determinazione del tipo di una conica

Abbiamo visto finora che ogni conica \mathcal{C} ha una forma canonica ed abbiamo trattato in dettaglio come trovarla nell'Esempio 24.5. Viene spontaneo domandarsi se c'è un metodo che, a priori, ci permetta di stabilire se \mathcal{C} è una conica classica o no e, nel caso \mathcal{C} sia classica se sia un'ellisse, un'iperbole o una parabola, **senza dovere necessariamente operare il cambio di coordinate**.

Nel seguito indicheremo con A la matrice dei termini di secondo grado di \mathcal{C} e con B la sua matrice completa.

Definizione 24.6. Una conica \mathcal{C} si dice *degenere* se la sua equazione si decompone in un prodotto di due polinomi di grado 1 (non necessariamente distinti), *non degenere* altrimenti.

È facile rendersi conto che una conica in forma canonica è degenere se e solo se la sua matrice B' ha determinante nullo.

Poiché dalla Proposizione 24.4 segue che la matrice B di \mathcal{C} è legata a quella B' della sua forma canonica da una relazione del tipo $\lambda B' = {}^tQBQ$ per un qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ non nullo, calcolando i determinanti di ambo i membri possiamo dedurre il seguente risultato.

Proposizione 24.7. Una conica \mathcal{C} è degenere se e solo se la sua matrice completa B ha determinante nullo.

Supponiamo che \mathcal{C} sia non degenere: allora \mathcal{C} è un'ellisse immaginaria, oppure è una conica classica. Supponiamo di essere in questo secondo caso. Se $\alpha x'^2 + \beta y'^2 = \gamma$

è una sua equazione canonica, \mathcal{C} è un'ellisse, un'iperbole o una parabola secondoché α e β siano concordi, discordi, o uno di essi sia nullo. Indicata con

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

la matrice dei termini di secondo grado della forma canonica di \mathcal{C} , di nuovo dalla Proposizione 24.4 sappiamo che $\lambda A' = {}^t P A P$ per un qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ non nullo. Deduciamo allora che \mathcal{C} è un'ellisse, un'iperbole o una parabola secondoché A' , e dunque A , sia definita, indefinita, semidefinita.

Queste considerazioni ci permettono anche di classificare una conica calcolandone la sua equazione canonica senza necessariamente determinare la rototraslazione che la riduce in tale forma canonica.

Esempio 24.8. Si consideri la conica \mathcal{C} di equazione

$$4x^2 + 4xy + 4y + y^2 = 0.$$

Le matrici associate a \mathcal{C} sono

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det(B) = -16 \neq 0$, la conica \mathcal{C} è non degenera. Poiché $\det(A) = 0$, la conica \mathcal{C} è una parabola. Se vogliamo determinarne l'equazione canonica osserviamo che le matrici Q e P definite nella Proposizione Proposizione 24.4 soddisfano le relazioni

$${}^t Q B Q = \lambda B' = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^t P A P = \lambda A' = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

per un qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ non nullo. Poiché l'equazione di una conica e, di conseguenza, la sua matrice completa, è individuata a meno di una costante moltiplicativa, possiamo sempre supporre che sia $\lambda = 1$.

Quindi β deve essere l'autovalore non nullo di A , cioè $\beta = 5$. Confrontando i determinanti di B e B' si ottiene $-\beta\gamma^2 = -16$, cioè $\gamma = 4/\sqrt{5}$. Concludiamo che \mathcal{C} è una parabola la cui equazione canonica è

$$5y'^2 = \frac{8}{\sqrt{5}}x'.$$

Il parametro di \mathcal{C} è dunque $8/5\sqrt{5}$.

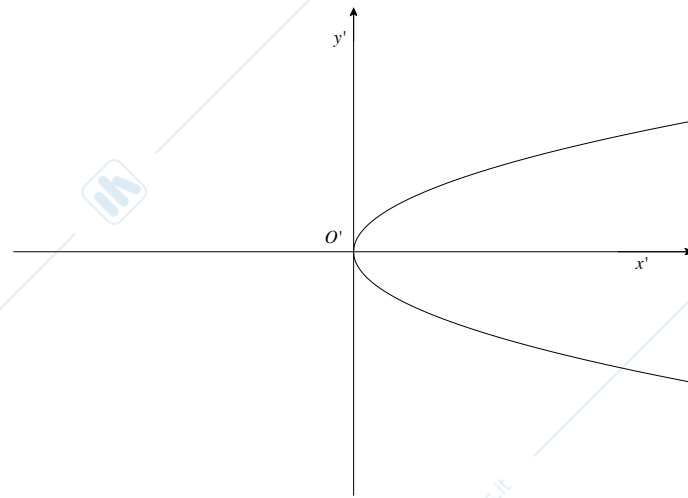


Figura 24.2

Nella Figura 24.2 riportiamo il disegno della conica \mathcal{C} .

Esempio 24.9. Si consideri la conica \mathcal{C} di equazione

$$7x^2 + 8xy + y^2 + 9x - 1 = 0.$$

Le matrici associate a \mathcal{C} sono

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 9/2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 9/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det(B) = -45/4 \neq 0$, la conica \mathcal{C} è non degenera. Poiché $\det(A) = -9$, la conica \mathcal{C} è un'iperbole. Se vogliamo calcolarne l'equazione canonica osserviamo che dobbiamo determinare le matrici Q e P definite nella Proposizione 24.4 tali che

$${}^tQBQ = B' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad {}^tPAP = A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Quindi α e β devono essere gli autovalori di A , cioè $\alpha = 9$ e $\beta = -1$, e confrontando i determinanti di B e B' , $-\alpha\beta\gamma = -45/4$, cioè $\gamma = -5/4$. Concludiamo che \mathcal{C} è un'iperbole la cui equazione canonica è

$$9x'^2 - y'^2 = -5/4.$$

Moltiplicando ambo i membri per $-4/5$ otteniamo

$$-\frac{36}{5}x'^2 + \frac{4}{5}y'^2 = 1.$$

I semiassi di \mathcal{C} sono dunque $\sqrt{5}/6$ (quello corrispondente all'asse immaginario) e $\sqrt{5}/2$ (quello corrispondente all'asse trasverso).

Nella Figura 24.3 riportiamo il disegno di \mathcal{C} nel sistema di riferimento $Ox'y'$.

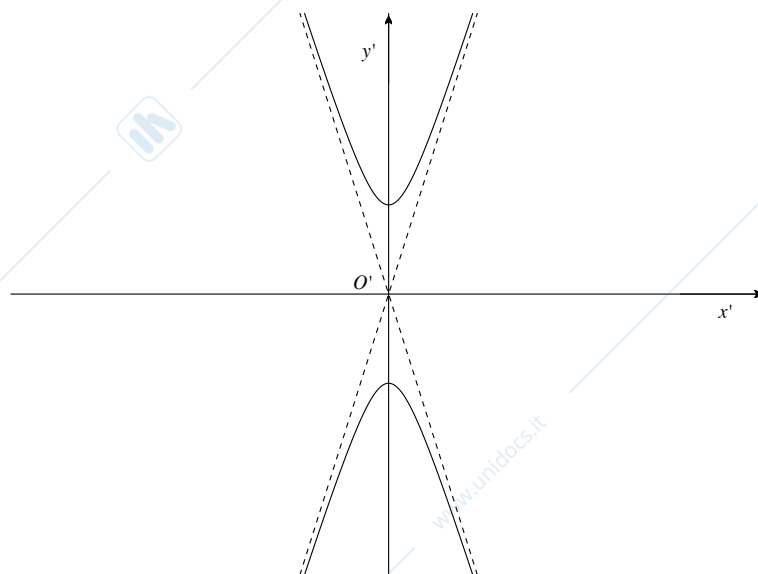


Figura 24.3

Tale ultima equazione non è l'equazione standard data nell'Esempio 23.1. Consideriamo la rotazione $x' = -y''$, $y' = x''$ di $\pi/2$ radianti (si veda l'Esempio 23.5) che trasforma l'equazione di \mathcal{C} nell'equazione standard

$$\frac{4}{5}x''^2 - \frac{36}{5}y''^2 = 1.$$

Nella Figura 24.4 riportiamo il disegno di \mathcal{C} nel sistema di riferimento $Ox''y''$.

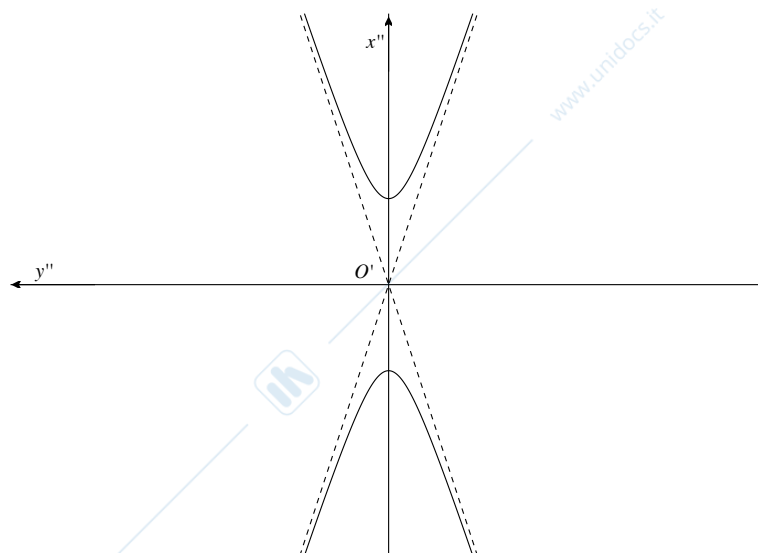


Figura 24.4

