# Lezione 18

## 18.1 Applicazioni lineari tra spazi di dimensione finita

Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ed $f\colon V \to W$ un'applicazione $K$–lineare. Supponiamo che $V$ sia finitamente generato: allora sappiamo che $\mathrm{Im}(f)$ è a sua volta finitamente generato per il punto (iii) della Proposizione 17.13.

Per questo motivo, qualora il dominio di un'applicazione lineare sia finitamente generato, a patto di cambiare opportunamente il codominio si può supporre che anch'esso sia finitamente generato.

Il seguente risultato afferma che, per descrivere un'applicazione lineare definita su uno spazio vettoriale finitamente generato, è sufficiente avere un numero finito di informazioni.

**Proposizione 18.1.** *Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali finitamente generati su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base di $V$. Dati $w_1, \dots, w_n \in W$ esiste un'unica applicazione $K$–lineare $f\colon V \to W$ tale che $f(v_i) = w_i$ per $i = 1, \dots, n$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che una tale $f$ esista. Essendo $f$ lineare se $v \in V$ e $[v]_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n)$ si deve avere

$$f(v) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i, \tag{18.1.1}$$

da cui segue immediatamente l'unicità

Verifichiamo che la formula (18.1.1) definisce un'applicazione $K$–lineare $f$ soddisfacente la tesi. Chiaramente $[v_i]_{\mathcal{B}} = e_i \in K^n$, dunque $f(v_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n$. Se poi $\alpha \in K$ si ha $[\alpha v]_{\mathcal{B}} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$, dunque

$$f(\alpha v) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) w_i = \alpha\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i w_i\Big) = \alpha f(v).$$

Se $v', v'' \in V$ e $[v']_{\mathcal{B}} = (x'_1, \dots, x'_n)$, $[v'']_{\mathcal{B}} = (x''_1, \dots, x''_n)$, allora $[v' + v'']_{\mathcal{B}} = (x'_1 + x''_1, \dots, x'_n + x''_n)$ e risulta

$$f(v' + v'') = \sum_{i=1}^{n} (x'_i + x''_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i w_i + \sum_{i=1}^{n} x''_i w_i = f(v') + f(v'').$$

Concludiamo che $f$ è un'applicazione $K$–lineare. □

Dalla Proposizione 18.1 deduciamo che se due applicazioni lineari coincidono sugli elementi di una base del dominio, esse coincidono ovunque, come spiegato nel seguente risultato.

**Corollario 18.2.** *Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali finitamente generati su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base di $V$. Allora:*

(i) *se $f, g \colon V \to W$ sono $K$–lineari e tali che $f(v_i) = g(v_i)$ per $i = 1, \ldots, n$, allora $f = g$;*

(ii) *se $h \colon V \to W$ è $K$–lineare e tale che $h(v_i) = 0_W$ per $i = 1, \ldots, n$, allora $h = 0_{V,W}$.*

Diamo ora alcuni esempi di applicazione della Proposizione e del Corollario di cui sopra.

**Esempio 18.3.** In $\mathbb{R}^3$ siano dati $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (2, 0, -1)$. Fissiamo poi $w_1 = (1, 1)$, $w_2 = (-1, 0)$, $w_3 = (0, 2)$ in $\mathbb{R}^2$.

Si verifichi che $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$: segue dalla Proposizione 18.1 che esiste un'unica applicazione lineare $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.

Poiché

$$(x, y, z) = y\ v_1 + (-x + 3y - 2z)\ v_2 + (x - 2y + z)\ v_3,$$

segue che

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(yv_1 + (-x + 3y - 2z)v_2 + (x - 2y + z)v_3) \\ &= yw_1 + (-x + 3y - 2z)w_2 + (x - 2y + z)w_3 \\ &= (x - 2y + 2z, 2x - 3y + 2z). \end{aligned}$$

♠

**Esempio 18.4.** In $\mathbb{R}^3$ siano dati $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (2, 0, -1)$, $v_4 = (4, 1, -1)$. Fissiamo poi $w_1 = (1, 1)$, $w_2 = (-1, 0)$, $w_3 = (0, 2)$, $w_4 = (0, 3)$ in $\mathbb{R}^2$. È chiaro che $v_1, v_2, v_3, v_4$ non possono formare una base di $\mathbb{R}^3$, quindi non possiamo applicare direttamente la Proposizione 18.1.

Tuttavia, dall'esempio precedente, sappiamo che esiste un'unica applicazione lineare $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$: si deve stabilire se vale anche $f(v_4) = w_4$. A tale scopo, o utilizziamo la formula già ottenuta per $f$, oppure osserviamo che $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$: dunque affinché $f(v_4) = w_4$ si deve avere la relazione

$$w_4 = f(v_4) = f(v_1 + v_2 + v_3) = f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) = w_1 + w_2 + w_3,$$

che è di immediata verifica.

Cosa si può affermare se si sostituisce $w_4$ con $w_4' = (1, 1)$? ♠

Prendiamo adesso in considerazione il caso degli isomorfismi, sempre tra spazi vettoriali di dimensione finita.

**Proposizione 18.5.** *Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali finitamente generati su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Allora $V \cong W$ se e solo se $\dim_K(V) = \dim_K(W)$.*

*Dimostrazione.* Siano $f \colon V \to W$ un isomorfismo e $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ e $\mathcal{D} = (w_1, \ldots, w_m)$ basi di $V$ e $W$ rispettivamente. Consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "{[\cdot]_{\mathcal{D}}}"] \\ K^n \arrow[u, "{[\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}}"] \arrow[r, "g"] & K^m \end{tikzcd} \tag{18.1.2}$$

dove la mappa $g$ è data dalla composizione

$$g = [\cdot]_{\mathcal{D}} \circ f \circ [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1} \colon K^n \longrightarrow K^m.$$

Essendo composizione di applicazioni lineari biettive, $g$ è lineare e biettiva, quindi è un isomorfismo. Poiché $g = \mu_A$ per una qualche $A \in K^{m,n}$, come mostrato nell'Esempio 17.4, deduciamo che $n = m$ dall'Esempio 17.23.

Viceversa, supponiamo che $\dim_K(V) = \dim_K(W)$ e siano $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ e $\mathcal{D} = (w_1, \ldots, w_n)$ basi di $V$ e $W$ rispettivamente. Possiamo considerare il diagramma (18.1.2) nel caso particolare in cui $n = m$ e $g = id_{K^n}$ è l'applicazione identità; invertendo il senso delle frecce verticali troviamo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[\cdot]_{\mathcal{B}}}"'] & W \\ K^n \arrow[r, "id_{K^n}"] & K^n \arrow[u, "{[\cdot]_{\mathcal{D}}^{-1}}"'] \end{tikzcd}$$

Allora $V \cong W$, poiché l'applicazione

$$f = [\cdot]_{\mathcal{D}}^{-1} \circ id_{K^n} \circ [\cdot]_{\mathcal{B}} : V \to W,$$

essendo composizione di isomorfismi, è essa stessa un isomorfismo. □

**Esempio 18.6.** Riprendiamo in considerazione i sottospazi $TS_n(K)$ (matrici triangolari superiori) e $Sim_n(K)$ (matrici simmetriche) di $K^{n,n}$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Nell'Esempio 16.12 abbiamo calcolato che $\dim_K(TS_n(K)) = n(n+1)/2$.

Sia $A \in K^{n,n}$; allora $A + {}^tA \in Sim_n(K)$ ed è definita l'applicazione

$$\begin{aligned} f \colon TS_n(K) &\longrightarrow Sim_n(K) \\ A &\mapsto A + {}^tA. \end{aligned}$$

Più in dettaglio, se $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, allora $f(A) = B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in Sim_n(K)$ dove

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{se } i < j, \\ 2a_{i,i} & \text{se } i = j, \\ a_{j,i} & \text{se } i > j. \end{cases} \tag{18.1.3}$$

Chiaramente $f$ è $K$–lineare: in fatti se $\alpha \in K$ e $A, A', A'' \in TS_n(K)$ risulta

$$f(\alpha A) = \alpha A + {}^t(\alpha A) = \alpha A + \alpha {}^tA = \alpha(A + {}^tA) = \alpha f(A),$$

$$\begin{aligned} f(A' + A'') &= A' + A'' + {}^t(A' + A'') = A' + A'' + {}^tA' + {}^tA'' \\ &= A' + {}^tA' + A'' + {}^tA'' = f(A') + f(A''). \end{aligned}$$

Dimostriamo che $f$ è un isomorfismo. Data $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in Sim_n(K)$, risulta $B = f(A)$ con $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in TS_n(K)$ definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} b_{i,j} & \text{se } i < j, \\ b_{i,i}/2 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i > j, \end{cases}$$

quindi $f$ è suriettiva.

Inoltre $f$ è iniettiva, cioè $\mathrm{Ker}(f) = \{\ 0_{n,n}\ \}$: se $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in TS_n(K)$ è tale che $f(A) = 0_{n,n}$, dalla relazione (18.1.3) segue che $a_{i,j} = 0 = 2a_{i,i}$, ovvero $A = 0_{n,n}$.

La Proposizione 18.5 garantisce dunque che

$$\dim_K(Sim_n(K)) = \dim_K(TS_n(K)) = \tfrac{n(n+1)}{2},$$

come anticipato nell'Esempio 16.13

Similmente si consideri l'insieme delle matrici antisimmetriche di $K^{n,n}$

$$Alt_n(K) = \{\ A \in K^{n,n} \mid {}^tA = -A\ \}.$$

Si verifichi che $Alt_n(K)$ è un sottospazio vettoriale di $K^{n,n}$ e che l'applicazione

$$\begin{aligned} g \colon STS_n(K) &\longrightarrow Alt_n(K) \\ A &\mapsto A - {}^tA \end{aligned}$$

è un isomorfismo: in particolare

$$\dim_K(Alt_n(K)) = \dim_K(STS_n(K)) = \tfrac{n(n-1)}{2}. \qquad \spadesuit$$

## 18.2 Matrice di un'applicazione lineare

Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali finitamente generati su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e siano $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathcal{D} = (w_1, \dots, w_m)$ basi di $V$ e $W$ rispettivamente. Come abbiamo visto nella dimostrazione della Proposizione 18.5, invece di studiare direttamente una certa applicazione $K$–lineare $f \colon V \to W$, può risultare più agevole comporla con opportuni isomorfismi con spazi vettoriali "semplici" come $K^n$ e $K^m$ e studiare al suo posto l'applicazione $K$–lineare composta $K^n \to K^m$ utilizzando quanto visto negli Esempi 17.4 e 17.23.

Nella dimostrazione della Proposizione 18.5 abbiamo visto che a un'applicazione $K$–lineare $f \colon V \to W$ possiamo associare il diagramma (18.1.2), cioè

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "{[\cdot]_{\mathcal{D}}}"] \\ K^n \arrow[u, "{[\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}}"] \arrow[r, "g"] & K^m \end{tikzcd}$$

dove, per definizione, $g$ è l'applicazione $K$–lineare $g = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ [\cdot]_{\mathcal{D}}$.

Dall'Esempio 17.4 segue l'esistenza di una matrice $A \in K^{m,n}$ tale che l'applicazione $g$ del diagramma sia della forma $\mu_A$, la moltiplicazione per $A$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "{[\cdot]_{\mathcal{D}}}"] \\ K^n \arrow[u, "{[\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}}"] \arrow[r, "\mu_A"] & K^m \end{tikzcd} \tag{18.2.1}$$

**La matrice $A$ dipende sia dall'applicazione $f$ che dalle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$.** Si noti che le colonne di $A$ sono $\mu_A(E_{j,1}) = ([\cdot]_{\mathcal{D}} \circ f \circ [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1})(E_{j,1})$: poiché $[\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(E_{j,1}) = v_j$, segue che le colonne di $A$ non sono altro che $([\cdot]_{\mathcal{D}} \circ f)(v_j) = [f(v_j)]_{\mathcal{D}}$: cioè la $j$–esima colonna di $A$ è formata dalle componenti rispetto alla base fissata nel codominio di $f$ (disposte in colonna!) del $j$–esimo vettore della base fissata nel dominio di $f$.

**Definizione 18.7** (**Matrice di un'applicazione lineare**)**.** Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali finitamente generati su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e siano $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ e $\mathcal{D} = (w_1, \ldots, w_m)$ basi di $V$ e $W$ rispettivamente.

Se $f\colon V \to W$ è un'applicazione $K$–lineare, definiamo *matrice di $f$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$* la matrice $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(f)$ avente per colonne le componenti delle immagini dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{D}$.

⚠ Nel caso in cui $V = K^n$ e $W = K^m$, la matrice di $f$ non è altro che la matrice di $f$ rispetto alle basi canoniche nel senso della definizione data sopra. In particolare quindi $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\mu_A) = A$.

**Esempio 18.8.** Sia $W$ uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbb{R}$, dotato di una base $\mathcal{D} = (w_1, w_2)$, e si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow W \\ (x, y, z) &\mapsto xw_1 + (2y + z)w_2. \end{aligned}$$

Detta $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, la matrice $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(f)$ è una matrice $2 \times 3$ le cui colonne sono $[f(e_i)]_{\mathcal{D}}$. Si ha che

$$f(e_1) = w_1, \qquad f(e_2) = 2w_2, \qquad f(e_3) = w_2,$$

quindi le coordinate di tali vettori sono

$$[f(e_1)]_{\mathcal{D}} = (1, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [f(e_2)]_{\mathcal{D}} = (0, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad [f(e_3)]_{\mathcal{D}} = (0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e la matrice cercata è

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

♠

**Esempio 18.9.** Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}[x]_1 &\longrightarrow \mathbb{R}[x]_2 \\ p(x) &\mapsto xp(x). \end{aligned}$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{R}[x]_1$, si ha

$$f(\alpha p(x)) = x(\alpha p(x)) = \alpha(xp(x)) = \alpha f(p(x)),$$

$$f(p_1(x) + p_2(x)) = x(p_1(x) + p_2(x)) = xp_1(x) + xp_2(x) = f(p_1(x)) + f(p_2(x)),$$

quindi $f$ è $\mathbb{R}$–lineare.

Consideriamo le basi $\mathcal{B} = (1, x)$ in $\mathbb{R}[x]_1$ e $\mathcal{D} = (1, x, x^2)$ in $\mathbb{R}[x]_2$ e determiniamo $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f)$. Risulta

$$[f(1)]_{\mathcal{D}} = [x]_{\mathcal{D}} = (0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad [f(x)]_{\mathcal{D}} = [x^2]_{\mathcal{D}} = (0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quindi

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si noti che $[f(a + bx)]_{\mathcal{D}} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f)[a + bx]_{\mathcal{B}}$. ♠

**Osservazione 18.10.** Alla luce della definizione di matrice associata ad un'applicazione lineare, la Proposizione 17.13 può essere interpretata dicendo che dati $V$ e $W$ spazi vettoriali su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $f : V \to W$ un'applicazione $K$–lineare, l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ è il sottospazio di $W$ generato dai vettori le cui componenti sono le colonne della matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f)$, dove $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ e $\mathcal{D} = (w_1, \ldots, w_m)$ sono basi di $V$ e $W$ rispettivamente.

**Osservazione 18.11.** Una conseguenza diretta della definizione e dell'Osservazione 17.11 è che la matrice associata ad un'applicazione lineare si "comporta bene" rispetto alla composizione di applicazioni: siano infatti $U, V, W$ spazi vettoriali finitamente generati su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ di dimensioni $p, n, m$ rispettivamente, dotati di basi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ rispettivamente. Siano $g : U \to V$, $f : V \to W$ due applicazioni $K$–lineari con matrici associate $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(g)$ e $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f)$. Allora la matrice associata alla composizione $f \circ g : U \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{A}$ di $U$ e $\mathcal{D}$ di $W$ è

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}}(f \circ g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f) M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(g),$$

come si può dedurre anche dal seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "{[\cdot]_{\mathcal{B}}}"'] & W \arrow[d, "{[\cdot]_{\mathcal{D}}}"] \\
K^p \arrow[u, "{[\cdot]_{\mathcal{A}}^{-1}}"] \arrow[r, "\mu_{M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(g)}"'] \arrow[rr, bend right, "\mu_{M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}}(f\circ g)}"'] & K^n \arrow[u, shift right, "{[\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}}"'] \arrow[r, "\mu_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f)}"'] & K^m.
\end{tikzcd}$$

Un'altra conseguenza immediata è che se $f : V \to W$ è invertibile, allora

$$M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f))^{-1}.$$

Tenendo conto che dal diagramma (18.2.1) segue che $g = ([\cdot]_{\mathcal{D}} \circ f \circ [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1})$, otteniamo la seguente serie di affermazioni equivalenti:

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(g) \subseteq K^n \quad &\Leftrightarrow \quad g(X) = 0_{K^m} \\ &\Leftrightarrow \quad ([\cdot]_{\mathcal{D}} \circ f \circ [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1})(X) = 0_{K^m} \\ &\Leftrightarrow \quad [f(v)]_{\mathcal{D}} = ([\cdot]_{\mathcal{D}} \circ f)(v) = 0_{K^m}, \text{ dove } v = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(X), \\ &\Leftrightarrow \quad f(v) = ([\cdot]_{\mathcal{D}}^{-1} \circ [\cdot]_{\mathcal{D}} \circ f)(v) = [\cdot]_{\mathcal{D}}^{-1}(0_{K^m}) = 0_W \\ &\Leftrightarrow \quad v \in \operatorname{Ker}(f) \subset V. \end{aligned}$$

In particolare, restringendo $[\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}$ a $\operatorname{Ker}(g)$, otteniamo un isomorfismo fra $\operatorname{Ker}(g)$ e $\operatorname{Ker}(f)$. Similmente, restringendo $[\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}$ a $\operatorname{Im}(f)$ otteniamo un isomorfismo fra $\operatorname{Im}(f)$ e $\operatorname{Im}(g)$.

Posto $A = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(f)$, risulta $g = \mu_A$ e, quindi, dalla Proposizione 16.14 segue

$$\begin{aligned} \dim_K(\operatorname{Im}(f)) &= \dim_K(\operatorname{Im}(\mu_A)) = \operatorname{rk}(A), \\ \dim_K(\operatorname{Ker}(f)) &= \dim_K(\operatorname{Ker}(\mu_A)) = n - \operatorname{rk}(A). \end{aligned}$$

In particolare abbiamo immediatamente il seguente risultato, spesso chiamato *Teorema della dimensione*: esso non è altro che il Teorema di Rouché–Capelli, o Proposizione 5.2

**Proposizione 18.12** (**Teorema della dimensione**). *Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali finitamente generati su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Se $f\colon V \to W$ è un'applicazione $K$–lineare si ha*

$$\dim_K(V) = \dim_K(\operatorname{Ker}(f)) + \dim_K(\operatorname{Im}(f)).$$

**Corollario 18.13.** *Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali finitamente generati su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e sia $f\colon V \to W$ un'applicazione $K$–lineare.*

(i) *Se $f$ è iniettiva, allora $\dim_K(V) \leqslant \dim_K(W)$;*
(ii) *se $f$ è suriettiva, allora $\dim_K(V) \geqslant \dim_K(W)$.*

Quanto visto sopra ci permette di studiare un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita in modo più facile, studiandola cioè tramite la sua matrice rispetto a basi fissate (che possiamo scegliere "comode").

**Esempio 18.14.** Il lettore verifichi che l'applicazione

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}[x]_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^{2,2} \\ a + bx + cx^2 &\mapsto \begin{pmatrix} a+b & a+c \\ b-c & b-c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

è lineare.

Fissiamo le basi $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ e $\mathcal{D} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ in $\mathbb{R}[x]_2$ e $\mathbb{R}^{2,2}$ rispettivamente. Poiché

$$[f(1)]_{\mathcal{D}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{D}} = (1,1,0,0), \qquad [f(x)]_{\mathcal{D}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{D}} = (1,0,1,1),$$

$$[f(x^2)]_{\mathcal{D}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{D}} = (0, 1, -1, -1),$$

segue che la matrice di $A$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo calcolare

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(\mu_A)) = 3 - \mathrm{rk}(A) = 1,$$
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(\mu_A)) = \mathrm{rk}(A) = 2,$$

da cui deduciamo che $f$ non è né iniettiva né suriettiva.

Se vogliamo studiare $\mathrm{Ker}(f)$ ed $\mathrm{Im}(f)$ più in dettaglio, possiamo studiare $\mathrm{Ker}(\mu_A)$ e $\mathrm{Im}(\mu_A)$. Risolvendo il sistema $AX = 0_{4,1}$ otteniamo

$$\mathrm{Ker}(\mu_A) = \{\ (a, -a, a) \mid a \in \mathbb{R}\ \},$$

quindi

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \{\ p(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \mid [p(x)]_{\mathcal{B}} \in \mathrm{Ker}(\mu_A)\ \} \\ &= \{\ a - ax - ax^2 \mid a \in \mathbb{R}\ \} = \mathcal{L}\big(1 - x - x^2\big).\end{aligned}$$

In particolare $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, come già visto sopra.

Una conseguenza immediata è che $0_{2,2} = f(1 - x - x^2) = f(1) - f(x) - f(x^2)$ ovvero $f(x^2) = f(1) - f(x)$, quindi

$$\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}\big(f(1), f(x), f(x^2)\big) = \mathcal{L}\big(f(1), f(x)\big).$$

Poiché $f(x) \notin \mathcal{L}(f(1))$, segue che $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(f)) = 2$, come già visto sopra. ♠

**Esempio 18.15.** Nell'Esempio 17.20 abbiamo verificato che, se $\vec{v}_0 \in V_3(O)$ è un vettore fissato, risulta

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\cdot \times \vec{v}_0) &= \{\ \vec{w} \in V_3(O) \mid \exists \vec{v} \in V_3(O) \text{ tale che } \vec{w} = \vec{v} \times \vec{v}_0\ \} \\ &\subseteq \vec{v}_0^{\perp} = \{\ \vec{w} \in V_3(O) \mid \langle \vec{w}, \vec{v}_0 \rangle = 0\ \}\end{aligned}$$

Se $\vec{v}_0 = \vec{0}$, allora $\mathrm{Im}(\cdot \times \vec{v}_0) = \mathcal{L}(\vec{0})$; se, invece, $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$, ancora l'Esempio 17.20 ci permette di affermare che $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\cdot \times \vec{v}_0)) = 1$, dunque la Proposizione 18.12 implica $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\cdot \times \vec{v}_0)) = 2$. D'altra parte $\vec{v}_0^{\perp}$ è un sottospazio di $V_3(O)$ (il lettore lo verifichi per esercizio) non contenente $\vec{v}_0$: poiché $\dim_{\mathbb{R}}(V_3(O)) = 3$ segue che $\dim_{\mathbb{R}}(\vec{v}_0^{\perp}) \leqslant 2$. Essendo $\mathrm{Im}(\cdot \times \vec{v}_0) \subseteq \vec{v}_0^{\perp}$ segue allora che deve valere l'uguaglianza, come anticipato.

Si noti che, fissato un sistema di riferimento $0\vec{\imath}\vec{\imath}\vec{k}$, risulta $\vec{v}_0 = a\vec{\imath} + b\vec{\imath} + c\vec{k}$. La matrice di $\cdot \times \vec{v}_0$ rispetto alla stessa base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\imath}, \vec{k})$ fissata nel dominio e codominio è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$ ♠

**Esempio 18.16.** Si considerino $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (1,0,2)$ in $\mathbb{R}^3$ e

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^{2,2}$. Poiché risulta

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

segue che $v_1, v_2, v_3$ sono linearmente indipendenti, quindi per la Proposizione 16.7 si ha che $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Per la Proposizione 18.1 esiste un'unica applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2,2}$ tale che $f(v_i) = A_i$, $i = 1,2,3$. Vogliamo studiare tale applicazione: a tale scopo scriviamone la matrice rispetto a basi opportunamente scelte nel dominio e nel codominio.

Nel dominio abbiamo varie scelte possibili, ad esempio la base canonica $\mathcal{C}$. Per semplificare al massimo la forma della matrice e, di conseguenza, i calcoli, la scelta migliore è, però, quella di prendere la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$.

Anche nel codominio possiamo fare molte scelte lecite: potremmo ad esempio prendere la base $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$, ma per semplificare al massimo i conti una scelta migliore è $\mathcal{D} = (A_1, A_2, E_{1,2}, E_{2,1})$ (verificare, per esercizio, che $\mathcal{D}$ è base di $\mathbb{R}^{2,2}$).

Si ha

$$\begin{aligned}
f(v_1) &= A_1 = 1A_1 + 0A_2 + 0E_{1,2} + 0E_{2,1} &\Rightarrow\quad [f(v_1)]_{\mathcal{D}} &= (1,0,0,0),\\
f(v_2) &= A_2 = 0A_1 + 1A_2 + 0E_{1,2} + 0E_{2,1} &\Rightarrow\quad [f(v_2)]_{\mathcal{D}} &= (0,1,0,0),\\
f(v_3) &= A_3 = 1A_1 + 1A_2 + 0E_{1,2} + 0E_{2,1} &\Rightarrow\quad [f(v_3)]_{\mathcal{D}} &= (1,1,0,0),
\end{aligned}$$

quindi

$$M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

È facile vedere dalla matrice che gli elementi $e_1, e_2$ della base canonica di $\mathbb{R}^4$ formano una base di $\operatorname{Im}(\mu_M) \subseteq \mathbb{R}^4$. Quindi $A_1 = [\cdot]^{-1}_{\mathcal{D}}(e_1)$, $A_2 = [\cdot]^{-1}_{\mathcal{D}}(e_2)$, formano una base $(A_1, A_2)$ di $\operatorname{Im}(f)$.

Inoltre $\operatorname{Ker}(\mu_M)$ è generato dal singolo vettore $e = (1,1,-1)$: dal momento che $(1,2,0) = v_1 + v_2 - v_3 = [\cdot]^{-1}_{\mathcal{B}}(e)$, segue che $\operatorname{Ker}(f)$ è generato dal vettore $(1,2,0)$.

Per esercizio si calcoli $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}}(f)$: si verifichi che $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}}(f) \neq M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f)$ e che procedendo come fatto sopra con la matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}}(f)$ in luogo di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f)$ si riottengono gli stessi risultati. ♠

## 18.3 Endomorfismi

**Proposizione 18.17.** *Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali finitamente generati su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ con $\dim_K(V) = \dim_K(W)$. Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- *$f$ è iniettiva,*
- *$f$ è suriettiva,*
- *$f$ è un isomorfismo.*

*Dimostrazione.* Per definizione, se $f$ è un isomorfismo è sia iniettiva che suriettiva.

Supponiamo $f$ sia iniettiva, quindi che $\dim_K(\mathrm{Ker}(f)) = 0$: per la Proposizione 18.12 e per l'ipotesi segue allora che $\dim_K(W) = \dim_K(V) = \dim_K(\mathrm{Im}(f))$, quindi per la Proposizione 16.9 $\mathrm{Im}(f) = W$, cioè $f$ è anche suriettiva, e quindi è un isomorfismo.

Se $f$ è suriettiva, allora $\dim_K(V) = \dim_K(W) = \dim_K(\mathrm{Im}(f))$, quindi $\dim_K(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ per la Proposizione 18.12, cioè $f$ è anche iniettiva, quindi è un isomorfismo. □

Vediamo ora un esempio che illustra l'utilità della precedente proposizione.

**Esempio 18.18.** Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathbb{C}[x]_2 \\ (a,b,c) &\mapsto a + (a+b)x + (a+b+c)x^2. \end{aligned}$$

Si ha che $(a,b,c) \in \mathrm{Ker}(f)$ se e solo se $a + (a+b)x + (a+b+c)x^2 = 0$ se e solo se $a = a+b = a+b+c = 0$, cioè se e solo se $(a,b,c) = (0,0,0)$: quindi $f$ è iniettiva. Grazie alla Proposizione 18.17 possiamo concludere che $f$ è un isomorfismo senza doverne studiare la suriettività.

Ad un analogo risultato si poteva arrivare osservando che la matrice di $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^3$ ed alla base $(1, x, x^2)$ di $\mathbb{C}[x]_2$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

che è invertibile. ♠

Consideriamo adesso un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale in se stesso.

**Definizione 18.19 (Endomorfismi).** Sia $V$ uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Un *endomorfismo* di $V$ è un'applicazione lineare $f\colon V \to V$.

Chiaramente la Proposizione 18.17 si applica, in particolare, agli endomorfismi di spazi vettoriali finitamente generati. Tuttavia essa non è valida se si lavora con uno spazio non finitamente generato: esistono endomorfismi suriettivi ma non iniettivi, o viceversa iniettivi ma non suriettivi, come mostrano i seguenti esempi.

**Esempio 18.20.** Sia $I = ]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto non vuoto. Nell'Esempio 17.8 abbiamo osservato che l'applicazione $D\colon \mathcal{C}^\infty(I) \to \mathcal{C}^\infty(I)$ è lineare, quindi è un endomorfismo. Tale applicazione non è iniettiva, ma è suriettiva per un ben noto risultato di analisi. ♠

**Esempio 18.21.** Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} f\colon K[x] &\longrightarrow K[x] \\ p(x) &\mapsto xp(x). \end{aligned}$$

Si verifichi che $f$ è lineare (e quindi un endomorfismo). Chiaramente $f$ è iniettiva, ma non è suriettiva, perché i polinomi costanti non sono in $\operatorname{Im}(f)$. ♠

Un caso particolarmente importante di endomorfismo è l'identità in uno spazio vettoriale finitamente generato $V$ su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

**Definizione 18.22** (**Matrice del cambiamento di base**)**.** Siano $V$ uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathcal{D} = (w_1, \dots, w_n)$ due basi di $V$.

La matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(id_V)$ avente per colonne le componenti dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{D}$ è detta *matrice del cambiamento di base* da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{D}$.

Osserviamo subito che per ogni vettore $v \in V$ vale la relazione

$$[v]_{\mathcal{D}} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(id_V)[v]_{\mathcal{B}}.$$

Un modo per ricordarsi la definizione è vedere la relazione sopra come una specie di "cancellazione" in croce:

$$[v]_{\mathcal{D}} = M^{\cancel{\mathcal{B}}}_{\mathcal{D}}(id_V)[v]_{\cancel{\mathcal{B}}}.$$

Si noti anche che vale la relazione

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(id_V) = (M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(id_V))^{-1}.$$

**Esempio 18.23.** Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$, sia $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la sua base canonica e siano $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathcal{D} = (w_1, w_2, w_3)$ altre due basi, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il lettore verifichi che si tratta in effetti di vettori indipendenti.

Le matrici di cambiamento di base più semplici da scrivere sono quelle di passaggio dalle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ a quella canonica, semplicemente perché abbiamo già le componenti dei loro vettori rispetto a $\mathcal{C}$. Si ha che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(id_V) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare le matrici di cambiamento di base dalla canonica $\mathcal{C}$ alle nuove basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ dobbiamo invece fare un po' più fatica. Cominciamo da $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)$: possiamo direttamente la definizione e calcolare le componenti $[e_i]_{\mathcal{B}}$ esplicitamente, oppure possiamo usare l'Osservazione 18.11 e ricordarci che

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V) = (M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V))^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il lettore verifichi il calcolo dell'inversa e trovi la matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(id_V)$.

Passiamo adesso a calcolare la matrice di cambiamento di base $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(id_V)$: di nuovo, grazie alll'Osservazione 18.11 si ha che

$$\begin{aligned} M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(id_V) &= M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V) M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(id_V) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 19 & -3 \\ 3 & -9 & 2 \\ -2 & -36 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lasciamo al lettore la verifica che

$$\begin{aligned} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(id_V) &= M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(id_V) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V) \\ &= (M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(id_V))^{-1} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V) = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 & 11/2 \\ -1/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$ ♠

⚠ Testi diversi utilizzano notazioni e nomi diversi per la matrice di cambiamento di base, ad esempio $A_{\mathcal{B}\to\mathcal{D}}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$ e molte altre. Segnaliamo al lettore che purtroppo alcuni testi usano anche la notazione $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}$ per intendere la matrice di cambio di base da $\mathcal{D}$ a $\mathcal{B}$, ovvero esattamente l'inversa della nostra.