

Quiz 2. Siano date

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Non esiste nessuna matrice X tale che $AX = B$.
- Esiste una matrice X tale che $BA = X$.
- $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$.
- $(BA)X = 0$ non è risolubile in $\mathbb{R}^{3,n}$.

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Infatti $AX = B$ ha soluzione se e solo se $\rho(A) = \rho(A|B)$ per il teorema di Rouché-Capelli. D'altra parte $\rho(A) = 2$, dunque necessariamente $\rho(A|B) = 2$.

L'affermazione b) è vera. Infatti equivale ad affermare che si può fare il prodotto BA , il che è vero per l'ordine delle matrici. Risulta

$$X = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'affermazione c) è falsa. Infatti l'affermazione è priva di senso in quanto le matrici A e B non possono essere sommate avendo diverso numero di colonne.

L'affermazione d) è falsa. Infatti un sistema omogeneo ha sempre almeno la soluzione banale. Si noti che essendo $\rho(BA) = 1$ (come visto sopra) esistono sempre soluzioni non banali.

Quiz 3. Si consideri il sistema $AX = 0$ ove $X \in \mathbb{R}^3$ ed

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Il sistema non è risolubile.
- Una base del suo spazio delle soluzioni è $((2, 0, -1), (0, 2, 0))$.
- Ha ∞^3 soluzioni.
- Ha solo la soluzione banale.

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Infatti un sistema omogeneo ha sempre almeno la soluzione banale.

L'affermazione b) è vera. Infatti $(2, 0, -1)$ e $(0, 2, 0)$ sono linearmente indipendenti e si verifica, per sostituzione diretta, che sono anche soluzioni di $AX = 0$. D'altra parte la dimensione dello spazio delle soluzioni di $AX = 0$ è $3 - \rho(A) = 2$ per il teorema di Rouché-Capelli.

L'affermazione c) è falsa. Infatti abbiamo visto nel corso della risposta precedente che la dimensione del suo spazio delle soluzioni è 2.

L'affermazione d) è falsa. Si proceda come nella risposta precedente.

Quiz 4. Siano

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- $AX = B$ è equivalente ad $XA = B$.
- $AX = B$ ha come soluzione un'unica terna di numeri reali.
- $AX = B$ ha infinite soluzioni.
- Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.