



Schemi sugli integrali definiti - Parte 1

Matematica
7 pag.

Document shared on <https://www.docsity.com/it/schemi-sugli-integrali-definiti-parte-1/5465414/>

INTEGRALI DEFINITI

SOMMA DI RIEMANN

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Consideriamo i punti:

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

che suddividono l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli aventi la stessa ampiezza, uguale a $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Scelto in ciascuno degli n intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ un punto arbitrario c_i , chiamiamo somma di Riemann

della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ la somma: $S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$

INTEGRALE DEFINITO

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si chiama integrale definito della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ il $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, essendo S_n una somma di Riemann della funzione f nell'intervallo $[a, b]$. L'integrale definito della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ viene indicato con il simbolo:

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ che si legge "integrale da } a \text{ a } b \text{ di } f(x) \text{ in } dx"$$

È il secondo estremo di integrazione

È il primo estremo di integrazione

La funzione f è la funzione integranda

Il simbolo dx indica la variabile rispetto cui si effettua l'integrazione

Il risultato del calcolo di un integrale definito è un numero reale

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DEFINITO

- LINEARITÀ
- ADDITIVITÀ RISPETTO ALL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE:

PER ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ RISULTA:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Valore medio di una funzione

Data una funzione f , continua nell'intervallo $[a, b]$, definiamo valore medio della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ il numero:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

TEOREMA DEL VALORE MEDIO

Se f è continua in $[a, b]$, esiste un numero $c \in [a, b]$ tale che $f(c)$ è uguale al valore medio della funzione in $[a, b]$, ossia tale che:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad \text{cioè} \quad \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

FUNZIONE INTEGRALE

Sia f una funzione continua in $[a, b]$; si chiama funzione integrale di f (relativa al punto a) la funzione $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia f una funzione continua in $[a, b]$ ed $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale associata a f (relativa al punto a), definita da:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Allora la funzione F è derivabile (e quindi anche continua) in $[a, b]$, e risulta:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

ESEMPIO

$$f(x) = \int_{-1}^x e^{-t^2} dt =$$

$$f'(x) = e^{-x^2}$$

CALCOLO DELL'INTEGRALE DEFINITO

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e sia $F(x)$ una sua qualsiasi primitiva in $[a, b]$. Allora: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

TENENDO CONTO CHE PER INDICARE LA DIFFERENZA $F(b) - F(a)$ SI USA DI SOLITO IL SIMBOLO $[f(x)]_a^b$, POSSIAMO COSÌ

SCHEMATIZZARE QUESTO TEOREMA:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Diagramma con etichette:

- estremi di integrazione (a, b)
- funzione integranda (f(x))
- variabile di integrazione (x)
- primitiva della funzione f (F(x))
- notazione sintetica per indicare la differenza tra F(b) e F(a)

ESEMPIO

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$\int_2^5 \sqrt{x-1} dx = \int_2^5 (x-1)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_2^5 = \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx =$$

$e^x = t$
 $x = \ln t$
 $dx = \frac{1}{t} dt$
 DOBBIAMO STABILIRE A QUALE INTERVALLO DI INTEGRAZIONE t CORRISPONDE L'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE IN x :
 $x = 0 \Rightarrow t = e^0 = 1$
 $x = 1 \Rightarrow t = e^1 = e$
 Quindi all'intervallo $[0, 1]$ corrisponde, nella nuova variabile t , l'intervallo $[1, e]$

$$\int_1^e \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{1}{t(t+1)} dt = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = [\ln|t| - \ln|t+1|]_1^e =$$

$$= \ln e - \ln(e+1) - \ln 1 - \ln 2 = 1 - \ln(e+1) + \ln 2$$

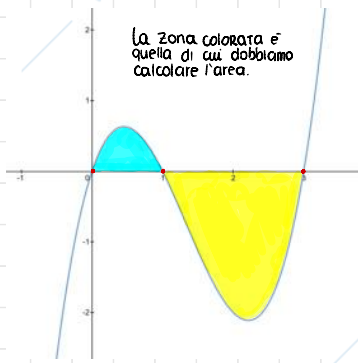
APPLICAZIONI GEOMETRICHE DEGLI INTEGRALI

IL CALCOLO DELLE AREE

AREA della regione di piano limitata dal grafico di una funzione e dall'asse x:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x \quad ; \quad \text{asse } x$$

DOBBIAMO TRACCIARE UN GRAFICO QUALITATIVO.



IN QUESTO CASO NON SERVE STABILIRE LE ASCISSE

DEI PUNTI DI ESTREMO RELATIVO O DI FLESSO;

CI SERVE PERO' SAPERE LE ASCISSE DEI PUNTI DI

INTERSEZIONE DELLA FUNZIONE CON L'ASSE X:

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 3.$$

• NELL'INTERVALLO $[0,1]$ LA FUNZIONE È POSITIVA $\rightarrow \int_0^1 f(x) dx$

• NELL'INTERVALLO $[1,3]$ LA FUNZIONE È NEGATIVA $\rightarrow -\int_1^3 f(x) dx$

QUINDI, L'AREA DELLA REGIONE RICHIESTA È DATA DA:

$$\int_0^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx - \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_1^3 = \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2} - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} \right) = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$$

AREA della regione limitata dal grafico di due funzioni:

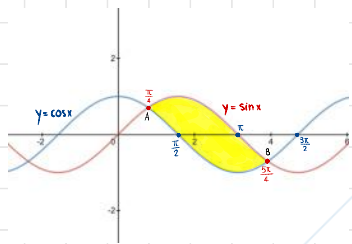
Siano f e g due funzioni continue in $[a,b]$, tali che $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. Allora l'area della regione

di piano limitata dai grafici di f e g nell'intervallo $[a,b]$ è data da: $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$

ESEMPIO

Siano A e B i due punti di intersezione, nell'intervallo chiuso $[0, 2\pi]$, delle due curve $y = f(x) = \sin x$ e

$y = g(x) = \cos x$. Calcoliamo l'area della regione di piano limitata dagli archi delle due curve aventi come estremi A e B .



DETERMINIAMO LE ASCISSE DEI PUNTI D'INTERSEZIONE:

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

QUINDI LE ASCISSE DEI DUE PUNTI D'INTERSEZIONE NELL'INTERVALLO $[0, 2\pi]$ SONO $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$

TENENDO CONTO CHE NELL'INTERVALLO $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ IL GRAFICO DELLA FUNZIONE $\sin x$ È "AL DI SOPRA"

di quello di $\cos x$ (quindi $f(x) > g(x)$), l'area della regione colorata sarà data da:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx = \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = -\cos \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$$

IL CALCOLO DEI VOLUMI

Consideriamo un solido limitato da due piani perpendicolari all'asse x , passanti per i punti di coordinate $(a,0)$ e $(b,0)$.

Supponiamo inoltre di conoscere l'area $S(x)$ della sezione del solido ottenuta conducendo il piano perpendicolare

all'asse x , passante per il punto di coordinate $(x,0)$.

PER CALCOLARE IL VOLUME DI QUESTO SOLIDO DOBBIAMO:

- 1) consideriamo anzitutto i punti $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ che dividono $[a,b]$ in n intervalli, ciascuno di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
- 2) suddividiamo il solido in n fette, ciascuna di "spessore" uguale a Δx , conducendo i piani perpendicolari all'asse x passanti per i punti $x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n$.
- 3) Scegliamo in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ un punto arbitrario c_i .

Nell'ipotesi che Δx sia infinitesimo, possiamo pensare di approssimare ogni "fetta" in cui il solido è stato suddiviso con un cilindro avente come altezza Δx e basi equivalenti alla sezione del solido ottenuta con il piano passante per $(c_i, 0)$.

IL VOLUME DI QUESTO CILINDRO È $S(c_i)\Delta x$ E LA SOMMA DEI VOLUMI DELLE VARIE FETTE È DATA DA:

$$S(c_1)\Delta x + S(c_2)\Delta x + \dots + S(c_n)\Delta x = \sum_{i=1}^n S(c_i)\Delta x$$

Volume di un solido

Consideriamo un solido limitato da due piani perpendicolari all'asse x , che intersecano l'asse x stesso nei punti di ascissa

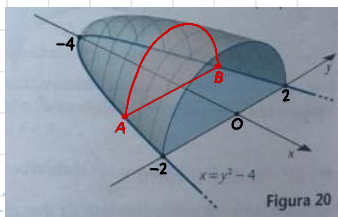
a e b . Sia inoltre $S(x)$ l'area della sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare all'asse x passante per $(x,0)$;

allora il volume V del solido è dato dalla formula: $V = \int_a^b S(x) dx$ *

ESEMPIO - calcolo del volume di un solido con il metodo delle sezioni

DETERMINIAMO IL VOLUME DEL SOLIDO CHE HA COME BASE IL SEGMENTO PARABOLICO LIMITATO DALLA PARABOLA DI

EQUAZIONE $x = y^2 - 4$ E DALL'ASSE x , LE CUI SEZIONI CON PIANI PERPENDICOLARI ALL'ASSE x SONO SEMICERCHI.



• CALCOLO DELL'AREA DI UNA SEZIONE

PER POTER APPLICARE * DOBBIAMO ANZITUTTO TROVARE L'AREA DELLA SEZIONE DEL SOLIDO OTTENUTA CON UN PIANO PERPENDICOLARE ALL'ASSE x PASSANTE PER $(x,0)$. SAPPIAMO CHE QUESTA SEZIONE È UN SEMICERCHIO. INDICHIAMO CON AB IL SUO DIAMETRO.

RISOLVENDO L'EQUAZIONE $x = y^2 - 4$ RISPETTO A y , SI RICOVA: $y = \pm \sqrt{x+4}$, QUESTE SONO LE COORDINATE DI A E B.

RAGGIO DEL SEMICERCHIO DI DIAMETRO AB È ALLORA: $r = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} (2\sqrt{x+4}) = \sqrt{x+4}$

AREA DEL SEMICERCHIO: $S(x) = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{\pi}{2} (x+4)$

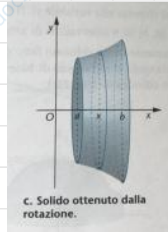
• CALCOLO DEL VOLUME DEL SOLIDO

IN BASE ALLA FORMULA *: $V = \int_{-4}^0 \frac{\pi}{2} (x+4) dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-4}^0 = \frac{\pi}{2} \cdot (-8 + 16) = \frac{\pi}{2} \cdot 8 = 4\pi$

SOLIDI DI ROTAZIONE



CONSIDERIAMO IL TRAPEZOIDE LIMITATO NELL'INTERVALLO $[a, b]$ dal grafico di una funzione $y = f(x)$ che supponiamo ESSERE POSITIVA O NULLA;

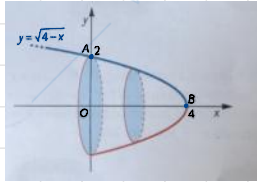


FACENDO RUOTARE TALE TRAPEZOIDE IN UN GIRO COMPLETO INTORNO ALL'ASSE x SI OTTIENE UN SOLIDO, LE CUI SEZIONI CON PIANI PERPENDICOLARI ALL'ASSE x SONO CERCHI.

PER DETERMINARE IL VOLUME DEL SOLIDO DOBBIAMO APPLICARE $V = \int_a^b S(x) dx$, TENENDO CONTO CHE L'AREA $S(x)$ DELLA SEZIONE DEL SOLIDO CON IL PIANO PASSANTE PER $(x, 0)$ È DATA DA: $S(x) = \pi [f(x)]^2$
 IL VOLUME PUÒ QUINDI ESSERE ESPRESSO ANCHE COME: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

ESEMPIO - calcolo del volume di un solido di rotazione

CONSIDERIAMO LA REGIONE FINITA DI PIANO LIMITATA DAGLI ASSI CARTESIANI E DAL GRAFICO DELLA FUNZIONE $y = \sqrt{4-x}$. DETERMINIAMO IL VOLUME DEL SOLIDO CHE SI OTTIENE FACENDO RUOTARE TALE REGIONE IN UN GIRO COMPLETO INTORNO ALL'ASSE x .



- IL GRAFICO DELLA FUNZIONE $y = \sqrt{4-x}$ È UN ARCO DI PARABOLA ED INTERSECA GLI ASSI CARTESIANI NEI PUNTI $A(0,2)$, $B(4,0)$
- IL SOLIDO DI CUI VOGLIAMO CALCOLARE IL VOLUME È QUELLO GENERATO DALLA ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE x DELLA PARTE DI PIANO LIMITATA DAGLI ASSI CARTESIANI E DALL'ARCO \widehat{AB} .

IL VOLUME DEL SOLIDO QUINDI È: $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{4-x})^2 dx = \pi \int_0^4 (4-x) dx = \pi \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi$

Consideriamo il caso in cui le sezioni siano ottenute con piani perpendicolari all'asse y :

Se $S(y)$ è l'area della generica sezione passante per il punto di coordinate $(0, y)$, il volume del solido è: $V = \int_0^b S(y) dy$

Analogamente, il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse y del trapezoide limitato dalla curva di

equazione $x = f(y)$ per $a \leq y \leq b$ è dato dalla formula: $V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 dy$ *

METODO DEI GUSCI CILINDRICI

data una funzione non negativa di equazione $y = f(x)$, consideriamo il trapezoide delimitato dal suo grafico nell'intervallo $[a, b]$ e il solido generato da una rotazione completa attorno all'asse y di tale trapezoide. È possibile giungere ad una formula che consente di calcolare il volume di tale solido integrando rispetto alla variabile x invece che y .

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (2\pi c_k) f(c_k) \Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \Rightarrow V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx *$$

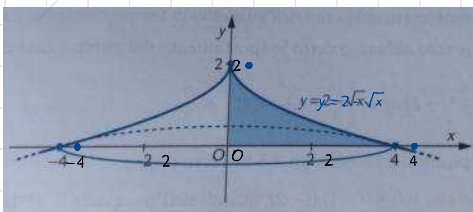
Somma di Riemann relativa alla funzione $(2\pi x) f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$

il vantaggio di questa formula è che non richiede di esplicitare l'equazione della funzione rispetto alla variabile x , nel caso in cui non fosse possibile o conveniente.

ESEMPIO - solido generato da una rotazione intorno all'asse y

consideriamo la parte di piano limitata dal grafico della funzione $y = 2 - \sqrt{x}$ e dagli assi

cartesiani. Qual è il volume del solido generato dalla rotazione completa di tale regione di piano intorno all'asse x ?



1° modo:

esplicitiamo l'equazione della funzione rispetto alla variabile x :

$$y = 2 - \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 - y \Rightarrow x = (2 - y)^2 \quad \text{con } y \leq 2$$

ora possiamo applicare *:

$$V = \pi \int_0^2 (2 - y)^4 dy = \pi \int_0^2 t^4 dt = \pi \left[\frac{t^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

ponendo $2 - y = t$

2° modo:

utilizzando il metodo dei gusci cilindrici (*) abbiamo:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^4 x (2 - \sqrt{x}) dx = 2\pi \int_0^4 (2x - x^{3/2}) dx = 2\pi \cdot 2 \int_0^4 x dx - \int_0^4 x^{3/2} dx = 2\pi \left[x^2 - \frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^4 = \\ &= 2\pi \cdot \left(16 - \frac{64}{5} \right) - 0 = 2\pi \cdot \frac{16}{5} = \frac{32\pi}{5} \end{aligned}$$