

# Lezione 17

## 17.1 Applicazioni lineari

**Definizione 17.1 (Applicazioni lineari).** Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali su un campo  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

Un'applicazione  $f: V \rightarrow W$  si dice  $K$ -lineare se:

(AL1) per ogni  $v_1, v_2 \in V$  si ha  $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ ;

(AL2) per ogni  $\alpha \in K$  e  $v \in V$  si ha  $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ .

Nel caso sia chiaro dal contesto quale sia il campo  $K$ , si parla semplicemente di *applicazione lineare*.

Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione  $K$ -lineare. Allora per ogni  $v \in V$  si ha

$$f(0_V) = f(0 \cdot 0_V) = 0f(0_V) = 0_W,$$

$$f(-v) = f((-1)v) = (-1)f(v) = -f(v).$$

Più in generale, un'applicazione  $f: V \rightarrow W$  è  $K$ -lineare se e solo se per ogni  $n$ -upla di scalari  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  e per ogni  $n$ -upla di vettori  $v_1, \dots, v_n \in V$ , si ha

$$f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n). \quad (17.1.1)$$

Infatti se vale (17.1.1) allora (AL1) è verificata prendendo  $n = 2$  e  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , mentre (AL2) è verificata prendendo  $n = 1$  e  $\alpha_1 = \alpha$ . Viceversa, se  $f$  è  $K$ -lineare allora possiamo verificare (17.1.1) per induzione su  $n \geq 1$ : se  $n = 1$  allora  $f(\alpha_1 v_1) = \alpha_1 f(v_1)$  per la proprietà (AL2). Se  $n \geq 2$  allora ponendo  $w' = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$  e  $w'' = \alpha_n v_n$  abbiamo

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) &= f(w' + w'') \\ &= f(w') + f(w'') \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_{n-1} f(v_{n-1}) + f(w'') \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n), \end{aligned}$$

dove le uguaglianze seguono rispettivamente dalla definizione di  $w'$  e  $w''$ , dalla proprietà (AL1), dall'ipotesi induttiva e dalla proprietà (AL2).

Se  $U \subseteq V$  è un sottospazio del dominio della funzione, allora  $f|_U: U \rightarrow W$  è lineare. Se  $W \subseteq U$  è un sottospazio del codominio, allora l'applicazione  $\hat{f}: V \rightarrow U$ , ottenuta componendo  $f$  con l'inclusione  $W \subseteq U$ , è lineare.

Il lettore verifichi che l'applicazione nulla  $0_{V,W}: V \rightarrow W$ , definita da  $v \mapsto 0_W$ , e l'applicazione identità  $id_V: V \rightarrow V$ , definita da  $v \mapsto v$ , sono  $K$ -lineari.

**Esempio 17.2.** L'applicazione

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (3x + y - z, x - y + 2z)$$

è lineare. Infatti, se  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , risulta

$$\begin{aligned} f(\alpha(x, y, z)) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\ &= (3(\alpha x) + (\alpha y) - (\alpha z), (\alpha x) - (\alpha y) + 2(\alpha z)) \\ &= (\alpha(3x + y - z), \alpha(x - y + 2z)) \\ &= \alpha(3x + y - z, x - y + 2z) = \alpha f(x, y, z). \end{aligned}$$

Inoltre, se  $(x', y', z'), (x'', y'', z'') \in \mathbb{R}^3$ , risulta

$$\begin{aligned} f((x', y', z') + (x'', y'', z'')) &= f(x' + x'', y' + y'', z' + z'') \\ &= (3(x' + x'') + (y' + y'') - (z' + z''), (x' + x'') - (y' + y'') + 2(z' + z'')) \\ &= (3x' + y' - z' + 3x'' + y'' - z'', x' - y' + 2z' + x'' - y'' + 2z'') \\ &= (3x' + y' - z', x' - y' + 2z') + (3x'' + y'' - z'', x'' - y'' + 2z'') \\ &= f(x', y', z') + f(x'', y'', z''). \end{aligned}$$

Per esercizio verificare in modo analogo che anche la seguente applicazione è lineare:

$$g: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$

$$(x, y) \mapsto (3x + y, x - y, -x + 2y) \spadesuit$$

**Esempio 17.3.** Si consideri l'applicazione

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (3x + y - z, x - y + 2z + 1).$$

Se  $f$  fosse lineare, da quanto osservato sopra, si dovrebbe avere  $f(0, 0, 0) = (0, 0)$ . Poiché però  $f(0, 0, 0) = (0, 1)$ , segue che  $f$  non è lineare. ♠

**Esempio 17.4.** Sia  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e sia  $A \in K^{m,n}$  una matrice fissata. L'applicazione

$$\mu_A: K^n \longrightarrow K^m$$

$$X \mapsto AX$$

è lineare. Infatti per qualsiasi  $\alpha \in K$  e  $X, X', X'' \in K^n$  risulta

$$\mu_A(\alpha X) = A(\alpha X) = \alpha(A X) = \alpha \mu_A(X),$$

$$\mu_A(X' + X'') = A(X' + X'') = A X' + A X'' = \mu_A(X') + \mu_A(X'').$$

Verifichiamo ora che ogni applicazione lineare  $f: K^n \rightarrow K^m$  è della forma  $\mu_A$  per un'unica  $A \in K^{m,n}$ . Sia  $\mathcal{B} = (E_{1,1}, \dots, E_{n,1})$  la base definita nell'Esempio 15.8 e siano  $A_j = f(E_{j,1}) \in K^m$  per  $j = 1, \dots, n$ : definiamo allora  $A$  come la matrice  $m \times n$  avente  $A_j$  come colonna  $j$ -esima. Per ogni  $X = (x_{1,1}, \dots, x_{n,1}) \in K^n$  risulta

$$f(X) = f\left(\sum_{j=1}^n x_{j,1} E_{j,1}\right) = \sum_{j=1}^n x_{j,1} f(E_{j,1}) = \sum_{j=1}^n x_{j,1} A_j = A X,$$

quindi  $f = \mu_A$  come applicazioni.

Si noti che la matrice costruita sopra è univocamente determinata: infatti se  $A' \in K^{m,n}$  fosse un'altra matrice, cioè  $f = \mu_{A'}$ , avremmo  $A_j = f(E_{j,1}) = A' E_{j,1}$  che è la  $j$ -esima colonna di  $A'$ , dunque  $A = A'$ .

Osserviamo che l'applicazione nulla  $K^n \rightarrow K^m$  è  $\mu_{0_{m,n}}$ , mentre l'applicazione identità  $K^n \rightarrow K^n$  è  $\mu_{I_n}$ .

Si verifichi che l'applicazione  $f$  dell'Esempio 17.2 si ottiene come caso particolare prendendo  $K = \mathbb{R}$  e

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}.$$

Similmente, si verifichi che l'applicazione  $g$  dell'Esempio 17.3 coincide con  $\mu_B$ , dove

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = {}^t A \in \mathbb{C}^{3,2} \quad \spadesuit$$

**Esempio 17.5.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  di dimensione  $n$  e sia  $\mathcal{B}$  una sua base. L'applicazione

$$\begin{aligned} [\cdot]_{\mathcal{B}}: V &\longrightarrow K^n \\ v &\mapsto [v]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

è lineare. Infatti se  $\alpha \in K$  e  $v, v_1, v_2 \in V$ , per quanto visto nell'Osservazione 15.5 risulta

$$[\alpha v]_{\mathcal{B}} = \alpha [v]_{\mathcal{B}}, \quad [v_1 + v_2]_{\mathcal{B}} = [v_1]_{\mathcal{B}} + [v_2]_{\mathcal{B}}. \quad \spadesuit$$

**Esempio 17.6.** Siano  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e  $a \in K$ . L'applicazione

$$\begin{aligned} v_a: K[x] &\longrightarrow K \\ p(x) &\mapsto p(a) \end{aligned}$$

di valutazione di un polinomio in un punto  $a$  è lineare. Infatti si ha che

$$v_a((p' + p'')(x)) = (p' + p'')(a) = p'(a) + p''(a) = v_a(p'(x)) + v_a(p''(x)),$$

$$v_a((\alpha p)(x)) = (\alpha p)(a) = \alpha p(a) = \alpha v_a(p(x)).$$

Poichè la restrizione a sottospazi conserva la linearità, anche le applicazioni ristrette  $v_a|_{K[x]_n}: K[x]_n \rightarrow K$  sono lineari per ogni  $n \geq 0$ . ♠

**Esempio 17.7.** Sia  $\vec{v}_0 \in V_3(O)$  un vettore fissato. Verificare per esercizio che l'applicazione *prodotto scalare per  $\vec{v}_0$* , definita da

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \vec{v}_0 \rangle: V_3(O) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} &\mapsto \langle \vec{v}, \vec{v}_0 \rangle, \end{aligned}$$

e l'applicazione *prodotto vettoriale per  $\vec{v}_0$* , definita da

$$\begin{aligned} \cdot \times \vec{v}_0: V_3(O) &\longrightarrow V_3(O) \\ \vec{v} &\mapsto \vec{v} \times \vec{v}_0, \end{aligned}$$

sono entrambe  $\mathbb{R}$ -lineari grazie alle proprietà di bilinearità dei prodotti scalare e vettoriale (si veda la Proposizione 8.3). ♠

**Esempio 17.8.** Sia  $I = ]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto non vuoto. Nell'Esempio 13.22 abbiamo osservato che l'insieme  $\mathcal{C}^p(I)$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  per ogni  $p \geq 0$ . Uno dei risultati dell'analisi delle funzioni di una variabile reale è che l'applicazione

$$\begin{aligned} D: \mathcal{C}^p(I) &\longrightarrow \mathcal{C}^{p-1}(I) \\ \varphi(x) &\mapsto D\varphi(x) = \frac{d\varphi}{dx}(x) \end{aligned}$$

è lineare per ogni  $p \geq 1$ . ♠

**Esempio 17.9.** Sia  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Ricordiamo che il coniugato di un numero complesso  $z$  è, per definizione, il numero complesso  $\bar{z} = a - bi$  e consideriamo l'applicazione *f* di *coniugio* su  $\mathbb{C}$ , cioè  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  è definita da  $z \mapsto \bar{z}$ . Allora *f* è chiaramente additiva, infatti

$$f(z' + z'') = \overline{z' + z''} = \bar{z}' + \bar{z}'' = f(z') + f(z'').$$

Invece se  $\alpha \in \mathbb{C}$  si ha  $f(\alpha z) = \overline{\alpha z}$  che coincide con  $\alpha f(z) = \alpha \bar{z}$  se e solo se  $\alpha \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ . Quindi il coniugio non è un'applicazione  $\mathbb{C}$ -lineare, ma solo  $\mathbb{R}$ -lineare. ♠

Concludiamo questo paragrafo con la seguente proposizione.

**Proposizione 17.10.** Siano  $U$ ,  $V$  e  $W$  spazi vettoriali su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Date le applicazioni lineari  $f, g: V \rightarrow W$  e  $h: W \rightarrow U$ , allora la composizione  $h \circ f: V \rightarrow U$  e la somma  $f + g: V \rightarrow W$  sono applicazioni lineari; lo stesso vale per il prodotto per uno scalare  $\lambda f: V \rightarrow W$ , per ogni  $\lambda \in K$ .

*Dimostrazione.* Per ogni  $v, v', v'' \in V$  risulta

$$\begin{aligned}(h \circ f)(v' + v'') &= h(f(v' + v'')) = h(f(v') + f(v'')) \\ &= h(f(v')) + h(f(v'')) = (h \circ f)(v') + (h \circ f)(v''), \\ (h \circ f)(\alpha v) &= h(f(\alpha v)) = h(\alpha f(v)) = \alpha h(f(v)) = \alpha((h \circ f)(v));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f + g)(v' + v'') &= f(v' + v'') + g(v' + v'') = f(v') + f(v'') + g(v') + g(v'') = \\ &= f(v') + g(v') + f(v'') + g(v'') = (f + g)(v') + (f + g)(v''), \\ (f + g)(\alpha v) &= f(\alpha v) + g(\alpha v) = \alpha f(v) + \alpha g(v) = \alpha(f(v) + g(v)) = \alpha((f + g)(v));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda f)(v' + v'') &= \lambda f(v' + v'') = \lambda(f(v') + f(v'')) = \lambda f(v') + \lambda f(v'') = (\lambda f)(v') + (\lambda f)(v''), \\ (\lambda f)(\alpha v) &= \lambda f(\alpha v) = \lambda \alpha f(v) = \alpha(\lambda f(v)) = \alpha((\lambda f)(v)).\end{aligned}$$

□

**Osservazione 17.11.** Siano  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ,  $A, B \in K^{m,n}$  e  $\lambda \in K$ : allora si ha che

$$\mu_A + \mu_B = \mu_{A+B}, \quad \lambda \mu_A = \mu_{\lambda A}.$$

Infatti, per ogni  $X \in K^n$ , si ha

$$\begin{aligned}(\mu_A + \mu_B)(X) &= \mu_A(X) + \mu_B(X) = AX + BX = (A + B)X = \mu_{A+B}(X), \\ (\lambda \mu_A)(X) &= \lambda(\mu_A(X)) = \lambda(AX) = (\lambda A)X = \mu_{\lambda A}(X).\end{aligned}$$

Siano  $A \in K^{m,n}$ ,  $B \in K^{n,p}$  e si considerino  $\mu_B: K^p \rightarrow K^n$ ,  $\mu_A: K^n \rightarrow K^m$ . Allora per ogni  $X \in K^p$  risulta

$$\mu_A \circ \mu_B(X) = \mu_A(\mu_B(X)) = \mu_A(BX) = A(BX) = (AB)X = \mu_{AB}(X):$$

concludiamo che  $\mu_A \circ \mu_B = \mu_{AB}$ .

**Esempio 17.12.** Con le notazioni dell'Esempio 17.8 possiamo definire l'applicazione di derivazione  $n$ -esima  $D^n = D \circ D^{n-1}: \mathcal{C}^\infty(I) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(I)$ .

Più in generale, se  $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{C}^\infty(I)$ , allora

$$P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

è  $\mathbb{R}$ -lineare.  $P(D)$  si dice *operatore differenziale lineare d'ordine  $n$* . ♠

## 17.2 Immagine e nucleo di un'applicazione lineare

Ricordiamo che se  $\varphi: X \rightarrow Y$  è un'applicazione fra due insiemi si definisce *immagine di  $\varphi$*  l'insieme

$$\text{Im}(\varphi) = \{ y \in Y \mid \text{esiste } x \in X \text{ tale che } \varphi(x) = y \}.$$

**Proposizione 17.13.** Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione  $K$ -lineare. Valgono le seguenti proprietà:

- (i)  $\text{Im}(f)$  è un sottospazio di  $W$ ;
- (ii) se  $w \in \text{Im}(f)$  e  $v_0 \in V$  è tale che  $f(v_0) = w$ , allora
- $$f^{-1}(w) = \{ v \in V \mid f(v) = w \} = \{ v_0 + v' \mid v' \in f^{-1}(0_W) \} = \{ v_0 \} + f^{-1}(0_W);$$
- (iii) se  $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ , allora  $\text{Im}(f) = \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ . In particolare se  $V$  è finitamente generato, lo stesso vale per  $\text{Im}(f)$ .

*Dimostrazione.*

- (i) Sappiamo che  $0_W \in \text{Im}(f)$ ; inoltre se  $w, w', w'' \in \text{Im}(f)$  ed  $\alpha \in K$  allora esistono  $v, v', v'' \in V$  tali che  $f(v) = w, f(v') = w', f(v'') = w''$ . Segue allora che

$$w' + w'' = f(v') + f(v'') = f(v' + v'') \in \text{Im}(f),$$

$$\alpha w = \alpha f(v) = f(\alpha v) \in \text{Im}(f).$$

- (ii) Sia  $v \in f^{-1}(w)$ . Allora  $f(v - v_0) = f(v) - f(v_0) = w - w = 0_W$ , quindi esiste  $v' \in f^{-1}(0_W)$  tale che  $v = v_0 + v'$ , dunque  $f^{-1}(w) \subseteq \{ v_0 \} + f^{-1}(0_W)$ .

Viceversa, se  $v' \in f^{-1}(0_W)$ , risulta che  $f(v_0 + v') = f(v_0) + f(v') = w + 0 = w$ , dunque si ha anche  $\{ v_0 \} + f^{-1}(0_W) \subseteq f^{-1}(w)$ . Concludiamo che  $f^{-1}(w) = \{ v_0 \} + f^{-1}(0_W)$

- (iii) Sia  $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ : se  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$ , allora si ha che

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i) \in \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n)),$$

dunque  $\text{Im}(f) \subseteq \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ . Viceversa, se  $w \in \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ , allora

$$w = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) \in \text{Im}(f),$$

dunque vale anche l'inclusione opposta  $\mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n)) \subseteq \text{Im}(f)$ . Concludiamo quindi che  $\text{Im}(f) = \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ .  $\square$

Una conseguenza immediata della Proposizione 17.13 è che se  $U \subseteq V$  è un sottospazio vettoriale, lo stesso vale per  $f(U)$ : infatti  $f(U) = \text{Im}(f|_U)$ .

Più interessante è osservare che la controimmagine del vettore nullo  $0_W$  riveste un ruolo fondamentale per le applicazioni  $K$ -lineari: l'affermazione (ii) della Proposizione 17.13 ci dice infatti che le controimmagini  $f^{-1}(w)$  tramite  $f$  dei vettori  $w \in \text{Im}(f)$  si ottengono tutte da quella  $f^{-1}(0_W)$  di  $0_W$  per traslazione di una controimmagine particolare.

Per questo motivo  $f^{-1}(0_W)$  merita un proprio nome.

**Definizione 17.14 (Nucleo di un'applicazione lineare).** Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

Se  $f: V \rightarrow W$  è  $K$ -lineare si definisce *nucleo di  $f$*  l'insieme

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(0_W) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}.$$

## 17.3 Applicazioni lineari iniettive e suriettive

Ricordiamo le seguenti due definizioni, valide per un'applicazione  $\varphi: X \rightarrow Y$  fra due insiemi di qualsiasi tipo. L'applicazione  $\varphi$  si dice *iniettiva* se, dati  $x', x'' \in X$  con  $x' \neq x''$ , si ha  $\varphi(x') \neq \varphi(x'')$ . L'applicazione  $\varphi$  si dice invece *suriettiva* se  $\text{Im}(\varphi) = Y$ .

Il seguente risultato è un'immediata conseguenza della Proposizione 17.13.

**Proposizione 17.15.** *Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Se  $f: V \rightarrow W$  è  $K$ -lineare, allora  $f$  è iniettiva se e solo se  $\text{Ker}(f) = \{0_V\}$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare iniettiva e  $v \in \text{Ker}(f)$ ; allora risulta  $f(v) = 0_W = f(0_V)$ , quindi per definizione di iniettività  $v = 0_V$ .

Viceversa, supponiamo che  $\text{Ker}(f) = \{0_V\}$  e siano  $v_1, v_2 \in V$  tali che  $f(v_1) = f(v_2)$ ; allora  $f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2) = 0_W$ , quindi  $v_1 - v_2 \in \text{Ker}(f)$ ,  $v_1 - v_2 = 0_V$ , cioè  $v_1 = v_2$ .  $\square$

Il nucleo ha anche un'altra importante proprietà: infatti, così come nella Proposizione 17.13 abbiamo dimostrato che l'immagine di un'applicazione lineare è un sottospazio vettoriale, lo stesso vale per il nucleo.

**Proposizione 17.16.** *Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Se  $f: V \rightarrow W$  è  $K$ -lineare, allora  $\text{Ker}(f)$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .*

*Dimostrazione.* Abbiamo già osservato che ogni applicazione lineare  $f: V \rightarrow W$  manda  $0_V$  in  $0_W$ , quindi  $0_V \in \text{Ker}(f)$ . Inoltre se  $v, v', v'' \in \text{Ker}(f)$  ed  $\alpha \in K$  allora

$$f(v' + v'') = f(v') + f(v'') = 0_W, \quad f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha 0_W = 0_W. \quad \square$$

**Esempio 17.17.** Sia  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e sia  $A \in K^{m,n}$  una matrice fissata. Si consideri l'applicazione lineare  $\mu_A: K^n \rightarrow K^m$  dell'Esempio 17.4.

Lo spazio  $\text{Ker}(\mu_A)$  è formato dalle  $X \in K^n$  tali che  $0_{K^m} = \mu_A(X) = AX$ . In particolare  $\text{Ker}(\mu_A)$  è un sottospazio di  $K^n$  di dimensione  $n - \text{rk}(A)$ .

Concludiamo che l'applicazione  $\mu_A$  è iniettiva se e solo se  $n = \text{rk}(A)$ : necessariamente allora  $n \leq m$ .

Ad esempio, l'applicazione  $f$  definita nell'Esempio 17.4 non può essere iniettiva: infatti tale applicazione coincide con  $\mu_A$ , dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha, chiaramente, rango 2. Quindi  $\dim(\text{Ker}(f)) = 3 - \text{rk}(A) = 1$ ; più in dettaglio, si ha che  $\text{Ker}(f) = \mathcal{L}(1, -7, -4)$ .

Invece l'applicazione  $g$ , sempre dell'Esempio 17.4, è iniettiva per lo stesso motivo: infatti è definita dalla matrice  $B = {}^t A$ , dunque  $\dim(\text{Ker}(g)) = 2 - \text{rk}(A) = 0$ , da cui segue  $\text{Ker}(g) = \{(0, 0)\}$ .

Per quanto riguarda l'immagine  $\text{Im}(\mu_A)$ , poiché le matrici  $E_{1,1}, \dots, E_{n,1}$  sono generatori di  $K^n$  la Proposizione 17.13 implica che

$$\text{Im}(\mu_A) = \mathcal{L}(\mu_A((E_{1,1}), \dots, \mu_A((E_{n,1}))) = \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) \subseteq K^m$$

dove  $A_1, \dots, A_n \in K^m$  sono le colonne della matrice  $A$ .

In particolare  $\text{Im}(\mu_A)$  è un sottospazio di  $K^m$  di dimensione  $\text{rk}(A)$ ; quindi  $\mu_A$  è suriettiva se e solo se  $m = \text{rk}(A)$ : necessariamente allora  $n \geq m$ .

Per esempio, tra le applicazioni  $f$  e  $g$  sopra  $f$  è suriettiva, mentre  $g$  non lo è. ♠

Ricordiamo dalla Lezione 5 che le soluzioni di un sistema lineare  $AX = B$  sono della forma  $X_0 + Y$ , ove  $X_0$  è una soluzione particolare ed  $Y$  è soluzione del sistema omogeneo associato  $AY = 0$ : osserviamo che ciò è coerente con la Proposizione 17.13, punto (ii).

Un'interessante conseguenza di questo legame fra dimensione dell'immagine e rango è la seguente: se  $A \in K^{m,n}$ ,  $B \in K^{n,p}$ , risulta

$$\text{rk}(AB) = \dim(\text{Im}(\mu_{AB})) = \dim(\text{Im}(\mu_A \circ \mu_B)).$$

Poiché  $\text{Im}(\mu_A \circ \mu_B) \subseteq \text{Im}(\mu_A)$ , concludiamo che  $\text{rk}(AB) \leq \dim(\text{Im}(\mu_A)) = \text{rk}(A)$ . In maniera analoga si ha che

$$\begin{aligned} \text{rk}(AB) &= \text{rk}({}^t(AB)) = \text{rk}({}^tB {}^tA) = \dim(\text{Im}(\mu_{{}^tB} {}^tA)) \\ &= \dim(\text{Im}(\mu_{{}^tB} \circ \mu_{{}^tA})) \leq \dim(\text{Im}(\mu_{{}^tB})) = \text{rk}({}^tB) = \text{rk}(B). \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che

$$\text{rk}(AB) \leq \min\{\text{rk}(A), \text{rk}(B)\}.$$

Alla disuguaglianza qui sopra si può anche giungere direttamente osservando che le righe (rispettivamente colonne) di  $AB$  sono combinazione lineare delle righe (rispettivamente colonne) di  $B$  (rispettivamente  $A$ ).

Se poi  $n = p$  e la matrice  $B \in K^{n,n}$  è invertibile, allora

$$\text{rk}(A) = \text{rk}((AB)B^{-1}) \leq \text{rk}(AB) \leq \text{rk}(A),$$

dunque  $\text{rk}(A) = \text{rk}(AB)$ .

La condizione che la matrice  $B$  sia invertibile è **fondamentale** perché valga l'uguaglianza tra  $\text{rk}(A)$  e  $\text{rk}(AB)$ : basti pensare al caso di due matrici (chiaramente non invertibili)  $A$  e  $B$  non nulle tali che  $AB = 0_{m,p}$ .

**Esempio 17.18.** Sia  $I = ]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto non vuoto e si consideri l'applicazione  $D: \mathcal{C}^p(I) \rightarrow \mathcal{C}^{p-1}(I)$  di derivazione definita nell'Esempio 17.12. Allora  $\text{Ker}(D)$  è costituito dalle funzioni  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $\varphi' = 0$  come funzioni. Segue allora dal Teorema di Lagrange che una tale  $\varphi$  deve essere costante su  $I$ . Concludiamo che  $D$  non è iniettiva.

Per quanto riguarda la suriettività, si osservi che  $\text{Im}(D)$  è costituito dalle funzioni  $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$  tali che esiste  $\varphi \in \mathcal{C}^p(I)$  per cui  $\varphi' = \psi$  ovvero dalle primitive di  $\psi$ : in particolare  $D$  è suriettiva, in quanto è noto che le primitive di una funzione di  $\mathcal{C}^{p-1}(I)$  sono tutte elementi in  $\mathcal{C}^p(I)$ .

Concludiamo che  $D$  è suriettiva e  $D^{-1}\psi$  è l'insieme di tutte le primitive di  $\psi$  che, usualmente, si indica con il simbolo  $\int \psi(x)dx$  e viene chiamato integrale indefinito di  $\psi$ .

Ricordiamo dalla teoria che due primitive di una funzione differiscono, su ogni intervallo contenuto nel dominio, per una costante: molto spesso si scrive

$$\int \psi(x)dx = \varphi(x) + c.$$

Come abbiamo visto sopra le funzioni costanti su  $I$  formano  $\text{Ker}(D)$ .

Più in generale si consideri l'operatore differenziale lineare

$$P(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n : \mathcal{C}^\infty(I) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(I),$$

anch'esso introdotto nell'Esempio 17.12. Il nucleo  $\text{Ker}(P(D))$  è l'insieme delle soluzioni  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I)$  dell'equazione differenziale lineare omogenea

$$a_0\varphi^{(n)} + a_1\varphi^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\varphi' + a_n\varphi = 0. \quad (17.3.1)$$

Ovviamente se  $b \in \mathcal{C}^\infty(I)$  allora  $P(D)^{-1}(b)$  è l'insieme delle soluzioni  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I)$  dell'equazione differenziale lineare non omogenea

$$a_0\varphi^{(n)} + a_1\varphi^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\varphi' + a_n\varphi = b. \quad (17.3.2)$$

La Proposizione 17.13, punto (ii) ci permette d'affermare che le soluzioni dell'equazione (17.3.2) si ottengono tutte sommando ad una soluzione particolare la totalità delle soluzioni dell'equazione omogenea associata (17.3.1), ovvero l'integrale generale dell'equazione (17.3.2) è somma di un integrale particolare più l'integrale generale dell'equazione omogenea associata (17.3.1). ♠

**Esempio 17.19.** Siano  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto non vuoto,  $x_0 \in I$  e  $g \in \mathbb{R}^I$  non nulla in  $I \setminus \{x_0\}$ . Si consideri il sottospazio

$$\mathcal{F}_{x_0,g} = \left\{ f \in \mathbb{R}^I \mid \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \right\}.$$

definito nell'Esempio 13.14.

Si consideri poi l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{F}_{x_0,g} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned}$$

che è chiaramente lineare per le proprietà dei limiti. Si ha che

$$\text{Ker}(\varphi) = \{ f \in \mathcal{F}_{x_0,g} \mid \varphi(f) = 0 \} = \left\{ f \in \mathcal{F}_{x_0,g} \mid \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \right\} = o(g),$$

ovvero il nucleo dell'applicazione  $\varphi$  coincide con le funzioni trascurabili rispetto a  $g$  per  $x \rightarrow x_0$ , il cosiddetto *o piccolo* di  $g$  per  $x \rightarrow x_0$ . In particolare,  $\varphi$  non è iniettiva.

Data una qualsiasi  $f \in \mathcal{F}_{x_0,g}$ , possiamo definire le funzioni "equivalenti" ad essa come gli elementi di  $\mathcal{F}_{x_0,g}$  che in un intorno del punto  $x_0$  si differenziano da  $f$  per un elemento di  $o(g)$ . ♠

**Esempio 17.20.** Nell'Esempio 17.7 sono state definite le applicazioni lineari prodotto scalare  $\langle \cdot, \vec{v}_0 \rangle$  e prodotto vettoriale  $\cdot \times \vec{v}_0$  per un vettore  $v_0$  fissato. Possiamo calcolarne i rispettivi nuclei:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\langle \cdot, \vec{v}_0 \rangle) &= \{ \vec{v} \in V_3(O) \mid \langle \vec{v}, \vec{v}_0 \rangle = 0 \}, \\ \text{Ker}(\cdot \times \vec{v}_0) &= \{ \vec{v} \in V_3(O) \mid \vec{v} \times \vec{v}_0 = \vec{0} \} = \begin{cases} \mathcal{L}(\vec{v}_0), & \text{se } \vec{v}_0 \neq \vec{0} \\ V_3(O) & \text{se } \vec{v}_0 = \vec{0}. \end{cases} \end{aligned}$$

Passiamo ora a studiare la suriettività delle due applicazioni. Si ha

$$\text{Im}(\langle \cdot, \vec{v}_0 \rangle) = \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \exists \vec{v} \in V_3(O) \text{ tale che } \alpha = \langle \vec{v}, \vec{v}_0 \rangle \}.$$

Poiché  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$ , segue che  $\langle \cdot, \vec{v}_0 \rangle$  è suriettiva se e solo se  $\text{Im}(\langle \cdot, \vec{v}_0 \rangle) \neq \{0\}$ . Se  $\vec{v}_0 = \vec{0}$  chiaramente  $\text{Im}(\langle \cdot, \vec{v}_0 \rangle) = \{0\}$ , quindi l'applicazione non è suriettiva: invece se  $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$ , poiché  $\langle \vec{v}_0, \vec{v}_0 \rangle = |\vec{v}_0|^2 \neq 0$ , segue che l'applicazione è suriettiva.

Per il prodotto vettoriale invece risulta

$$\begin{aligned} \text{Im}(\cdot \times \vec{v}_0) &= \{ \vec{w} \in V_3(O) \mid \exists \vec{v} \in V_3(O) \text{ tale che } \vec{w} = \vec{v} \times \vec{v}_0 \} \\ &\subseteq \vec{v}_0^\perp = \{ \vec{w} \in V_3(O) \mid \langle \vec{w}, \vec{v}_0 \rangle = 0 \} \end{aligned}$$

Vedremo in seguito che  $\text{Im}(\cdot \times \vec{v}_0) = \vec{v}_0^\perp$  se  $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$ .

## 17.4 Isomorfismi

Ricordiamo che un'applicazione  $\varphi: X \rightarrow Y$  fra due insiemi di qualsiasi tipo si dice *biiettiva* se è sia iniettiva che suriettiva. Ciò significa che se  $y \in Y$ , esiste (suriettività) ed è unico (iniettività)  $x \in X$  tale che  $\varphi(x) = y$ . In tal caso è quindi possibile definire l'applicazione inversa  $\varphi^{-1}: Y \rightarrow X$ , ponendo  $\varphi^{-1}(y) = x$ .

Di più, è possibile dimostrare che  $\varphi$  è biiettiva se e solo se esiste un'applicazione  $\psi: Y \rightarrow X$  tale che  $\psi \circ \varphi = id_X$  e  $\varphi \circ \psi = id_Y$  e risulta  $\psi = \varphi^{-1}$ .

**Definizione 17.21 (Isomorfismi).** Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

Un'applicazione  $f: V \rightarrow W$  si dice *isomorfismo* se è lineare e biiettiva; in tal caso  $V$  e  $W$  si dicono *isomorfi* e si scrive  $V \cong W$ .

**Esempio 17.22.** Siano  $V$  uno spazio vettoriale su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  una sua base. Si consideri l'applicazione  $[\cdot]_{\mathcal{B}}: V \rightarrow K^n$ , che abbiamo dimostrato essere lineare nell'Esempio 17.5. Chiaramente essa è suriettiva: infatti per qualsiasi  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$  si ha  $[\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Inoltre  $[\cdot]_{\mathcal{B}}$  è anche iniettiva: infatti se  $v \in \text{Ker}([\cdot]_{\mathcal{B}})$  allora  $v = \sum_{i=1}^n 0v_i = 0_V$ .

Concludiamo perciò che  $[\cdot]_{\mathcal{B}}$  è un isomorfismo. ♠

**Esempio 17.23.** Siano  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e  $A \in K^{m,n}$  una matrice fissata. Da quanto visto nel paragrafo precedente, segue che l'applicazione  $\mu_A$  è un isomorfismo se e solo se valgono  $n - \text{rk}(A) = 0$  e  $m = \text{rk}(A)$  ovvero se e solo se  $n = m = \text{rk}(A)$ , cioè se e solo se  $A$  è invertibile. Dalla catena di uguaglianze

$$\mu_A \circ \mu_A^{-1} = id_{K^n} = \mu_{I_n} = id_{K^n} = \mu_A^{-1} \circ \mu_A$$

si deduce che, in tal caso,  $\mu_{A^{-1}} = \mu_A^{-1}$ .

In particolare  $K^n \cong K^m$  se e solo se  $n = m$ . ♠

**Esempio 17.24.** Dalla discussione fatta nell'Esempio 17.20 sulle applicazioni lineari prodotto scalare  $\langle \cdot, \vec{v}_0 \rangle$  e prodotto vettoriale  $\cdot \times \vec{v}_0$  deduciamo che tali applicazioni non sono mai isomorfismi. ♠

Siano adesso  $V$  e  $W$  spazi vettoriali su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Se  $f: V \rightarrow W$  è un isomorfismo, allora l'applicazione inversa  $f^{-1}: W \rightarrow V$  è definita nel modo seguente:  $f^{-1}(w) = v$  se e solo se  $f(v) = w$ . Concludiamo il paragrafo dimostrando che anche l'applicazione inversa è un isomorfismo.

**Proposizione 17.25.** *Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali su  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Se  $f: V \rightarrow W$  è un isomorfismo, allora anche  $f^{-1}$  è un isomorfismo.*

*Dimostrazione.* Siano  $w', w'' \in W$  e poniamo  $v' = f^{-1}(w')$ ,  $v'' = f^{-1}(w'')$ ,  $\hat{v} = f^{-1}(w' + w'')$ . Risulta che

$$f(\hat{v}) = w' + w'' = f(v') + f(v'') = f(v' + v''),$$

quindi

$$f^{-1}(w' + w'') = \hat{v} = v' + v'' = f^{-1}(w') + f^{-1}(w'').$$

Sia ora  $w \in W$ ,  $\alpha \in K$  e poniamo  $v = f^{-1}(w)$ ,  $\tilde{v} = f^{-1}(\alpha w)$ . Risulta che

$$f(\tilde{v}) = \alpha w = \alpha f(v) = f(\alpha v),$$

quindi

$$f^{-1}(\alpha w) = \tilde{v} = \alpha v = \alpha f^{-1}(w). \quad \square$$

**Osservazione 17.26.** Si noti che  $V \cong V$  in quanto  $id_V: V \rightarrow V$  è lineare e biettiva. La Proposizione 17.25 mostra che se  $V \cong W$ , allora  $W \cong V$ . Infine la composizione di applicazioni biettive è, ovviamente, biettiva: segue quindi che se  $U \cong V$  e  $V \cong W$  allora  $U \cong W$ . Concludiamo che la relazione d'isomorfismo fra spazi vettoriali su  $K$  è una relazione di equivalenza.