(2) Siano
$$w_1 := (1,0,1), \quad w_2 := (1,1,0), \quad w_3 := (1,0,0).$$
Verificare che $\mathcal{C} := (w_1, w_2, w_3)$ è una base di W.

(3) Si dimostra che esiste un'unica applicazione lineare $f: V \to W$ tale che
$$f(v_1) := w_1 + w_3, \quad f(v_2) := -w_1 + w_2,$$
$$f(v_3) := w_3, \quad f(v_4) := 3w_1 + 2w_2 - w_3.$$
Determinare $M(f)$.

Svolgimento. Per verificare che $\mathcal{B}$ è una base procediamo calcolando il rango della matrice avente le componenti dei vettori come righe. Tale matrice è
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
che ha rango 4 (si noti che la matrice è ridotta per colonne).

Analogamente $\mathcal{C}$ è una base. Infatti la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ha rango 3 (è ridotta per colonne).

Per calcolare $M(f)$ si può procedere sfruttando la linearità di f e calcolando $f(e_i)$. Risulta
$$e_1 = v_1, \quad e_2 = -v_1 + v_4,$$
$$e_3 = 2v_1/5 + v_2/5 - 3v_4/5, \quad e_4 = -3v_1/5 + v_2/5 + v_3 - 13v_4/5,$$
quindi si ottiene
$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(v_1) = w_1 + w_3 = (2,0,1), \\ f(e_2) &= f(-v_1 + v_4) = 2w_1 + 2w_2 - 2w_3 = (2,2,2), \\ f(e_3) &= f(2v_1/5 + v_2/5 - 3v_4/5) = -8w_1/5 - w_2 + w_3 = (-8/5, -1, -8/5), \\ f(e_4) &= f(-3/5v_1 + v_2/5 + v_3 - 13v_4/5) = \\ &= -43w_1/5 - 5w_2 + 3w_3 = (-53/5, -5, -43/5). \end{aligned}$$
Quindi
$$f(e_1) = (2,0,1), \quad f(e_2) = (2,2,2),$$
$$f(e_3) = (-8/5, -1, -8/5), \quad f(e_4) = (-21/5, -17/5, 5).$$
Concludiamo allora che
$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8/5 & -21/5 \\ 0 & 2 & -1 & -17/5 \\ 1 & 2 & -8/5 & 5 \end{pmatrix}.$$