Esercizio 6. Scrivere un sistema $AX = B$ avente come insieme delle soluzioni

$$V := (1, 0, 1, -1) + \mathcal{L}((0, 0, 0, 1)).$$

Svolgimento. Poiché V non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dobbiamo considerare sistemi non omogenei. Per come è definito V il corrispondente sistema omogeneo deve avere come spazio delle soluzioni $\mathcal{L}((0, 0, 0, 1))$. Infine per il teorema di Rouché–Capelli il rango della matrice incompleta A del sistema deve essere

$$4 - \dim(\mathcal{L}((0, 0, 0, 1))) = 3.$$

Per esempio sia

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ma potremmo scegliere una qualsiasi altra matrice A' d'ordine $m \times 4$ e di rango 3 tale che $A'\,{}^t(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$). Sappiamo poi che $(1, 0, 1, -1)$ deve essere soluzione particolare, quindi deve essere

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Concludiamo che un sistema avente V come spazio delle soluzioni è

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ z = 1. \end{cases}$$

Quiz

Quiz 1. Sia

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ -h & h & h \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $\varrho(A) = 3$.
b) Per $h = 1$ il sistema $AX = 0$ ha ∞^1 soluzioni.
c) ${}^tA = A^{-1}$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.
d) A è invertibile per $h = 1$.

Svolgimento. L'affermazione a) è falsa. Infatti le prime due righe di A sono linearmente indipendenti, ma

$$|A| = 4h + 5h - 10h + h,$$

dunque $\varrho(A) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

L'affermazione b) è vera. Infatti per quanto visto sopra, $\varrho(A) = 2$ per $h = 1$ (in effetti, per ogni $h \in \mathbb{R}$). In particolare lo spazio delle soluzioni del sistema $AX = 0$ ha dimensione $3 - \varrho(A) = 1$ per il teorema di Rouché–Capelli.

L'affermazione c) è falsa. Infatti è noto che una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo rango è massimo rispetto al suo ordine. Quindi A è invertibile se e solo se $\varrho(A) = 3$, mentre abbiamo visto sopra che $\varrho(A) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

L'affermazione d) è falsa. Si veda la risposta a c).