Perciò, che $\mathcal{C}$ è un'ellisse (reale).

Complessivamente la rototraslazione è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' - 2\sqrt{3} \\ y' - 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5\sqrt{3}/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Quindi, il sistema di riferimento canonico $O'x'y'$ ha origine nel punto di coordinate $(-5\sqrt{3}/2, 3/2)$ rispetto ad $Oxy$ ed assi paralleli e concordi con i vettori $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$.

**Esercizio 2.** Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale $Oxy$ sia data la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$34x^2 - 24xy + 41y^2 + 40x + 30y = 0.$$

(1) Determinare una forma canonica di $\mathcal{C}$ individuandone il tipo.
(2) Calcolare le equazioni di una rototraslazione che riduce $\mathcal{C}$ in tale forma canonica.

*Svolgimento.* Chiaramente la risposta alla seconda domanda comprende anche la risposta alla prima, quindi il metodo più "economico" per affrontare l'esercizio è quello di rispondere direttamente al secondo quesito.

Qui procederemo invece secondo l'ordine delle domande. Le matrici di $\mathcal{C}$ sono

$$A = \begin{pmatrix} 34 & -12 \\ -12 & 41 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 34 & -12 & 20 \\ -12 & 41 & 15 \\ 20 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare $\det(B) = -31250 \neq 0$, dunque $\mathcal{C}$ è non degenere, e $\det(A) = 1250 > 0$, dunque $\mathcal{C}$ è un'ellisse, evidentemente reale poiché $O(0,0)$ ne soddisfa l'equazione.

Per determinare forma canonica e rototraslazione dobbiamo calcolare gli autospazi di $A$. Il polinomio caratteristico di $A$ è

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 34 - t & -12 \\ -12 & 41 - t \end{vmatrix} = t^2 - 75t + 1250 = (t - 25)(t - 50),$$

quindi gli autovalori di $A$ sono 25 e 50. Per calcolare gli autospazi corrispondenti dobbiamo risolvere i sistemi

$$\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -12 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque gli autospazi sono $E_A(25) = \mathcal{L}((4,3))$, $E_A(50) = \mathcal{L}((-3,4))$, quindi gli assi del sistema di riferimento canonico sono paralleli ai vettori $\hat{\imath} = (4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})/5$ e $\hat{\jmath} = (-3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath})/5$. Siano $\widehat{x}, \widehat{y}$ le coordinate nel sistema di riferimento $O\widehat{x}\widehat{y}$. La rotazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix}$$

trasforma l'equazione di $\mathcal{C}$ in

$$25\widehat{x}^2 + 50\widehat{y}^2 + 50\widehat{x} = 0$$

Poiché $25(\widehat{x}^2 + 2\widehat{x}) = 25(\widehat{x} + 1)^2 - 25$ la traslazione

$$\begin{cases} x' = \widehat{x} + 1 \\ y' = \widehat{y} \end{cases}$$