

**Esercizio 4.** Sia  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$  definito da

$$f(x, y, z, t) := (-x + z, -y + t, x - z, y - t).$$

Determinare la dimensione ed una base di  $\ker(f)$  e di  $\text{im}(f)$ .

*Svolgimento.* Affinché  $v = (a, b, c, d) \in \ker(f)$  si deve avere

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b - d = 0. \end{cases}$$

In particolare

$$\ker(f) = \{ (a, b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)).$$

Si verifica facilmente che  $v_1 := (1, 0, 1, 0), v_2 := (0, 1, 0, 1)$  sono linearmente indipendenti, quindi  $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$  è una base di  $\ker(f)$  e, dunque,  $\dim(\ker(f)) = 2$ .

Poiché  $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f))$ , segue che  $\dim(\text{im}(f)) = 2$ . Ricordo che  $\text{im}(f) = \mathcal{L}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ , pertanto, per determinare una base  $\mathcal{C}$  di  $\text{im}(f)$ , è sufficiente individuare due vettori linearmente indipendenti fra  $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ . Per esempio  $v_3 := f(e_1) = (-1, 0, 1, 0)$  e  $v_4 := f(e_2) = (0, -1, 0, 1)$  sono linearmente indipendenti, quindi possiamo scegliere  $\mathcal{C} := (v_3, v_4)$ .

**Esercizio 5.** Sia  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  definito da

$$f(a, b, c) := (a - hc, b - hb, c - ha).$$

Determinare una base di  $\ker(f)$  al variare di  $h \in \mathbb{R}$ .

*Svolgimento.* Risulta  $(a, b, c) \in \ker(f)$  se e solo se  $(a, b, c)$  è soluzione del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1-h & 0 \\ -h & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Procedendo con operazioni elementari di riga

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1-h & 0 \\ -h & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + hR_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1-h & 0 \\ 0 & 0 & 1-h^2 \end{pmatrix}$$

si osserva che se  $h \neq \pm 1$  l'unica soluzione è quella banale, perciò  $\ker(f) = \{0\}$  in questo caso.

Se, invece,  $h = 1$  il sistema si riduce alla sola equazione  $a - c = 0$ . In particolare

$$\ker(f) = \{ (a, b, a) \}$$

ed una base di  $\ker(f)$  è  $\mathcal{C} := ((1, 0, 1), (0, 1, 0))$ .

Infine, se  $h = -1$  il sistema si riduce a

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 2b = 0. \end{cases}$$

In particolare

$$\ker(f) = \{ (a, 0, -a) \}$$

ed una base di  $\ker(f)$  è in tal caso  $\mathcal{D} := ((1, 0, -1))$ .