Quiz 3. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy sia data la conica $\mathcal{C}$ d'equazione

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $\mathcal{C}$ è una parabola.
b) $\mathcal{C}$ è un'iperbole.
c) $\mathcal{C}$ è un'ellisse.
d) Nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

Svolgimento. Le matrici di $\mathcal{C}$ sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det(B) = -16$ segue che $\mathcal{C}$ non è degenere.

Inoltre $\mathcal{C}$ è una parabola, un'iperbole, un'ellisse se e solo se $\det(A) = 0$, $\det(A) < 0$, $\det(A) > 0$ rispettivamente: si verifica facilmente che $\det(A) = 0$, dunque l'affermazione a) è vera, mentre le affermazioni b) e c) sono false. Concludiamo che 'affermazione d) è anch'essa falsa.

Quiz 4. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy sia $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le 2}$ una matrice simmetrica ad entrate in $\mathbb{Z}$ tale che $a_{2,2}$ è primo ed $a_{1,2}$ non è suo multiplo, $\mathcal{C}$ una qualsiasi conica avente A come matrice della forma quadratica dei termini di secondo grado. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $\mathcal{C}$ non è una parabola.
b) $\mathcal{C}$ non è un'iperbole.
c) $\mathcal{C}$ non è un'ellisse reale.
d) $\mathcal{C}$ non è un'ellisse immaginaria.

Svolgimento. L'affermazione a) è vera. Infatti $\mathcal{C}$ è una parabola se e solo se

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2 = 0.$$

Se ciò accadesse allora $a_{1,2}^2 = a_{1,1}a_{2,2}$, quindi $a_{2,2}$ sarebbe un fattore primo di $a_{1,2}^2$, quindi di $a_{1,2}$, in contrasto con l'ipotesi.

Le affermazioni b), c), d) sono false. Infatti sia

$$B_{h,n} = \begin{pmatrix} h & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{Z}$. Poiché $a_{2,2} = 2$ ed $a_{1,2} = 3$ siamo nelle ipotesi date, dunque $B_{h,n}$ rappresenta una conica $\mathcal{C}_{h,n}$ che non è una parabola. Si noti che

$$\begin{vmatrix} h & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2h - 9 = (-1)^n \det(B_{h,n}).$$

In particolare $\mathcal{C}_{h,n}$ è sempre non degenere ed è un'iperbole se $h < 9/2$, è un'ellisse reale se $h > 9/2$ e n è dispari, è un'ellisse immaginaria se $h > 9/2$ e n è pari.