trasforma l'equazione di $\mathcal{C}$ in $25x'^2 + 50y'^2 = 25$. Dividendo ambo i membri per 25 otteniamo perciò

$$x'^2 + 2y'^2 = 1$$

Riotteniamo, perciò, che $\mathcal{C}$ è un'ellisse (reale).

Complessivamente la rototraslazione è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'-1 \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}.$$

Il sistema di riferimento canonico $O'x'y'$ ha perciò origine nel punto avente coordinate $(-4/5, -3/5)$ rispetto ad Oxy ed assi paralleli e concordi con i vettori $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$.

Esercizio 3. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy sia data la conica $\mathcal{C}_{(a,b)}$ di equazione

$$x^2 + 6xy - by^2 - a = 0.$$

(1) Classificare $\mathcal{C}_{(a,b)}$ al variare di $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Esistono valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_{(a,b)}$ sia una parabola non degenere?

Svolgimento. Le matrici associate a $\mathcal{C}_{(a,b)}$ sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -b \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Risulta $\det(B) = a(b+9)$: quindi $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è degenere se e solo se $(a,b) = (0,b), (a,-9)$. Nel primo caso l'equazione di $\mathcal{C}_{(0,b)}$ diviene

$$x^2 + 6xy - by^2 = (x+3y)^2 - (9+b)y^2 = (x + 3y - \sqrt{9+b}y)(x + 3y + \sqrt{9+b}y):$$

in particolare $\mathcal{C}_{(0,b)}$ è una coppia di rette, immaginarie o reali, incidenti secondoché $b < -9$, $b > -9$, mentre è una retta doppia se e solo se $b = -9$. Nel secondo caso

$$x^2 + 6xy + 9y^2 - a = (x+3y)^2 - a = (x + 3y - \sqrt{a})(x + 3y + \sqrt{a}):$$

in particolare $\mathcal{C}_{(a,-9)}$ è una coppia di rette, immaginarie o reali, parallele secondoché $a < 0$, $a > 0$, mentre è una retta doppia se e solo se $a = 0$. Pertanto l'unico valore di (a,b) per cui $\mathcal{C}_{(a,b)}$ sia doppiamente degenere è $(0,-9)$.

Supponiamo ora $\det(B) = a(b+9) \neq 0$. Si ha $\det(A) = -(9+b)$. $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è una parabola se e solo se $b = -9$: in tal caso risulta essere degenere come già visto, quindi $\mathcal{C}_{(a,b)}$ non è mai una parabola non degenere.

$\mathcal{C}_{(a,b)}$ è un'iperbole se e solo se $b > -9$: quindi $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è un'iperbole non degenere se e solo se $a \neq 0$, $b > -9$.

Infine $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è un'ellisse se e solo se $b < -9$. Per distinguere i valori di (a,b) corrispondenti ad ellissi reali ed immaginarie osserviamo che per $b < -9$ si ha $\mathrm{Tr}(A) = 1 - b > 10 > 0$: in particolare gli autovalori α, β di A sono positivi, sicché una forma canonica di $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = a.$$

Concludiamo che $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è un'ellisse reale non degenere se e solo se $b < -9$ ed $a > 0$, mentre è un'ellisse immaginaria non degenere se e solo se $b < -9$ ed $a < 0$.