

Calcolo differenziale

- Definizione di derivata
- Significato geometrico
- Derivate successive
- Il calcolo delle derivate
- Derivabilità e continuità

Definizione di rapporto incrementale

Definizione

Si dice rapporto incrementale della funzione f in x_0 di incremento $h = \Delta x = x - x_0$ il rapporto :

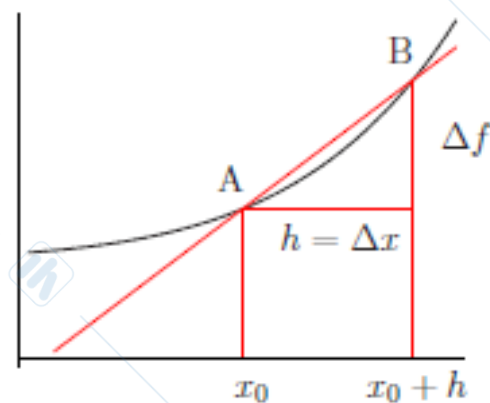
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

per $x = x_0 + h$

Dal punto di vista geometrico il rapporto incrementale di f in x_0 di incremento h rappresenta il coefficiente angolare della retta passante per i punti A e B.

A $(x_0, f(x_0))$

B $(x_0 + h, f(x_0 + h))$



Definizione di derivata in un punto

Definizione

$f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ t.c. $\exists U^+(x_0) \subset X$ [$\exists U^-(x_0) \subset X$].

Si dice derivata destra [sinistra] della funzione f in x_0

il limite se \exists finito per $h \rightarrow 0$ del suo rapporto incr. destro [sinistro] .

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\left[f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right]$$

Definizione

$f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, è derivabile in x_0 interno ad X se \exists finiti $f'_+(x_0)$ e

$f'_-(x_0)$ e si ha $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Tale valore reale si dice derivata di f in x_0 e donotato con uno dei simboli :

$$f'(x_0), \quad (Df)(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \frac{df}{dx}|_{x_0}, \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}.$$

Definizione di derivata in un punto

Osservazione

Se invece x_0 è l'estremo destro (sinistro) di X , si dice che la funzione f è derivabile in x_0 se e solo se esiste la derivata sinistra (destra), cioè la sola che si può calcolare.

Esempio:

$$f(x) = xe^{\sqrt{x}}$$

C.E.: $[0, +\infty)$ \Rightarrow in 0 posso calcolare solo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^{\sqrt{x}} - 0e^{\sqrt{0}}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^{\sqrt{x}}}{x} = 1$$

$\Rightarrow f$ derivabile in 0 e la derivata vale 1.

Definizione di derivata

Definizione

Se \exists finiti $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ ma $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$
 x_0 si dice punto angoloso.

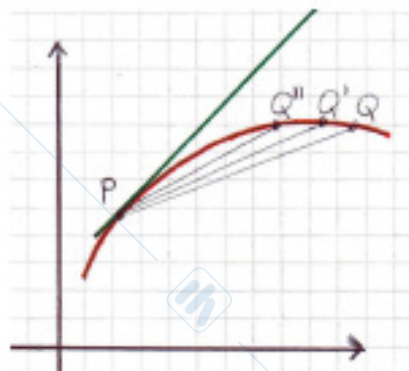
Esempio:

$f(x) = |x|$ ha un punto angoloso in $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Significato geometrico della derivata



L'esistenza della derivata di f in x_0 corrisponde al fatto che il grafico di f in $P = (x_0, f(x_0))$ ammetta una *retta tangente* (intesa come limite di rette secanti) e che tale retta tangente non sia verticale.

Se la derivata esiste, $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente in P , pertanto la retta tangente ha equazione

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ESERCIZIO - Stabilire se il grafico Γ_f di $f(x) = x^2 + 1$ ammette tangente in $A = (1, 2)$ e, in caso affermativo, determinare l'equazione della retta tangente a Γ_f in A .

Significato geometrico della derivata

Definizione

f ammette tg verticale in $A (x_0, f(x_0))$ se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad (\text{oppure } -\infty)$$

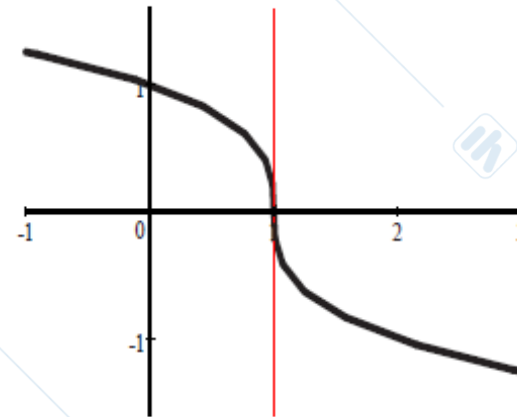
La retta tg ha equazione $x = x_0$.

Esempio:

$f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ In $x_0 = 1$ si ha :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1-x} - 0}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t}}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} = -\infty$$

$\Rightarrow f$ ha in $A (1, 0)$ tg verticale di equazione $x = 1$.



Significato geometrico della derivata

Definizioni

Se $f'(x_0) = 0$ f ammette tg orizzontale in $A(x_0, f(x_0))$

La retta tg ha equazione $y = f(x_0)$.

Esempio: $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$\text{in } x_0 = 0 \quad f'(0) = 0$$

$(0,0)$ è punto a tg orizzontale

Se A punto angoloso, ho due rette tg
con coeff. angolari $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$

Esempio: $f(x) = e^{|x|}$ $(0,1)$ è punto angoloso

$$f'_+(0) = 1 \quad f'_-(0) = -1$$

rette tg : $y = 1 + x$ e $y = 1 - x$

Funzione derivata

Definizione

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, sull'insieme A' dei punti in cui f è derivabile, si può definire una funzione $f' : A' \rightarrow \mathbb{R}$ che ad ogni $x \in A'$ associa il valore della derivata di f in x , cioè $f' : x \mapsto f'(x)$.

La funzione f' viene detta *funzione derivata* di f .

ESEMPIO - La funzione $f(x) = x^2$ è definita su $A = \mathbb{R}$ ed è derivabile in tutti i punti di \mathbb{R} , infatti, per ogni $x_0 \in A$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Quindi si ha $A' = \mathbb{R}$ e $f'(x) = 2x$.

Se funzione derivata f' è a sua volta derivabile, la sua derivata viene detta *derivata seconda*: $(f')' = f''$.

Analogamente si definisce la *derivata terza*, ecc.

Calcolo di derivate

Le funzioni elementari sono derivabili.

f	c	x^α	e^x	a^x	$\log x$	$\log_a x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\arctan x$	$\arcsin x$	$\arccos x$
f'	0	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^x	$a^x \log a$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \log a}$	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Poiché trattiamo funzioni ottenibili da funzioni elementari mediante somma, prodotto, quoziente, composizione, inversa, avendo a disposizione le derivate delle funzioni elementari, per la derivazione ci basta sapere come si comporta la derivata rispetto a tali operazioni:

Calcolo di derivate

	Regole di derivazione
Somma: $f + g$	$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
Prodotto: $f \cdot g$	$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quoziente: $\frac{f}{g}$ (con $g(x) \neq 0$)	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Composta: $g \circ f$	$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
Inversa: f^{-1}	$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, dove $f'(x) \neq 0$ $y = f(x)$

Calcolo di derivate

Esercizio: Usare le regole di derivazione per calcolare le derivate delle funzioni

1) $f(x) = x^2 + \text{sen}x$

2) $f(x) = \sqrt{x} \log x + 2^x \cos x$

3) $f(x) = \frac{\text{sen}x}{x^3}$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

5) $f(x) = \cos(\log(x^4))$

6) $f(x) = x^{\text{sen}x}$

Derivabilità e continuità

Teorema: Siano $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$.

Se f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0 .

Osservazione:

Se f continua in $x_0 \not\Rightarrow f$ derivabile in x_0

Esempio:

$f(x) = |x|$ continua in $x_0 = 0$, ma non derivabile.

Osservazione:

Se f ammette in x_0 derivate fino all'ordine n , tali derivate sono continue in x_0 .

Calcolo differenziale - applicazioni

- Teoremi di De l'Hôpital
- Teorema di Taylor
- Teoremi di Rolle e Lagrange
- Punti di massimo e minimo di una funzione
- Concavità e convessità di una funzione
- Studio di funzione

Teoremi di De l'Hôpital

Teorema:

Se f e g soddisfano le ipotesi :

1) continue e derivabili in $I = (a, b)$, sia $x_0 \in I$, con $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \left(\text{caso } \frac{0}{0} \right)$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \quad \left(\text{caso } \frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$3) \exists \text{ finito o infinito } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Teoremi di De l'Hôpital

Osservazioni:

- 1) Il teorema vale anche per il calcolo
del limite sinistro se l'intervallo è (a, x_0)
del limite destro se le ipotesi valgono in (x_0, b)
del limite per $x \rightarrow +\infty$ se l'intervallo è $(a, +\infty)$
del limite per $x \rightarrow -\infty$ se l'intervallo è $(-\infty, b)$
- 2) Se i teoremi vengono applicati quando non sono verificate tutte le ipotesi, in particolare quando non si è di fronte a forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, o quando il limite del rapporto delle derivate non esiste, il calcolo potrebbe portare a risultati sbagliati.
- 3) Se le ipotesi sono soddisfatte posso applicare più volte il teorema.

Esercizio:

Calcolare:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 + 1 - \cos x}{x^2}$$

Teoremi di De l'Hôpital

4) Possiamo dimostrare la gerarchia degli infiniti :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{teo. Del 'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad (\text{con c. di var. } t = \frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{kx}}{x^\alpha} = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{k/\alpha x}}{x} \right]^\alpha = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{\alpha} e^{k/\alpha x} \right]^\alpha = +\infty \quad \forall \alpha, k > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\log x} \stackrel{\text{teo. Del 'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha x^\alpha = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\log^k x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{\alpha/k}}{\log x} \right)^k = +\infty \quad \forall \alpha, k > 0$$

Teorema di Taylor

Definizione:

Sia f derivabile n volte in x_0 . Il polinomio :

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

è detto polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0 .

Teorema:

Sia f derivabile n volte in x_0 . Allora

$\exists I(x_0)$ t. c. $\forall x \in I(x_0)$ la funzione $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^n$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \quad \text{cioè} \quad R_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

Definizione:

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$$

è detta formula di Taylor di ordine n in x_0 .

Polinomio di Taylor e di Mc Laurin

Osservazione:

Il teorema di Taylor permette di approssimare in un intorno di x_0 una funzione derivabile n volte in x_0 con un polinomio, in quanto si ha che:

$$f(x) \sim P_n(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

in part. se $f^{(h)}(x_0)$ è la prima derivata non nulla in x_0 ,

$$f(x) \sim f(x_0) + \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!} (x - x_0)^h \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Definizione:

Se $x_0 = 0$ il polinomio di Taylor prende il nome di polinomio o sviluppo di Mc Laurin di ordine n di f :

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ESERCIZIO - Calcolare il polinomio di Taylor di $f(x) = 2 + 3x - x^2 + 3x^3$ di ordine 2 centrato in 0.

Polinomi di Mc Laurin

Esempio:

Considero $f(x) = \sin x$ e ricavo la formula di Mc Laurin di ordine n :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin(x) = 0 + \cos(0)x + \frac{-\sin(0)}{2}x^2 + \frac{-\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin(0)}{4!}x^4 + \frac{\cos(0)}{5!}x^5 + \dots =$$

$$\sin(x) = x + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

In particolare per $x \rightarrow 0$ si ottengono i seguenti sviluppi di Mc Laurin, che sono la generalizzazione di quanto mostrato per i limiti notevoli e utili per risolvere forme di indecisione nel calcolo dei limiti.

Polinomi di Mc Laurin

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+1}), \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} x^n + o(x^n), \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Polinomi di Mc Laurin

Esercizi:

- Calcolare lo sviluppo di Mc Laurin di ordine 4 di $f(x) = x^2 - 2 + 2\cos x$
- Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4}.$$

Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \log(1+x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{\tan x - x}$$

Teorema di Rolle

Teorema di Rolle:

Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) t. c. $f(a) = f(b)$.

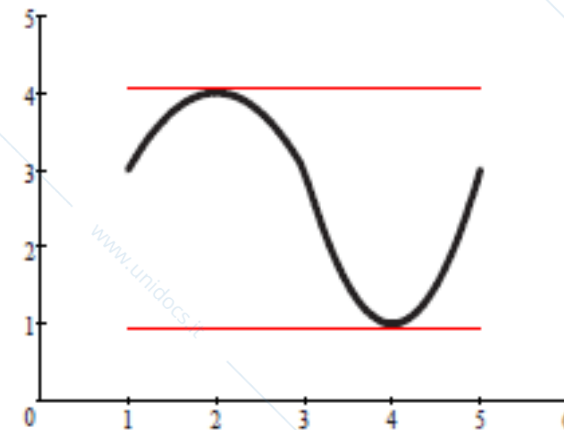
$\Rightarrow \exists$ almeno un $c \in [a, b]$ t.c. $f'(c) = 0$

Osservazioni:

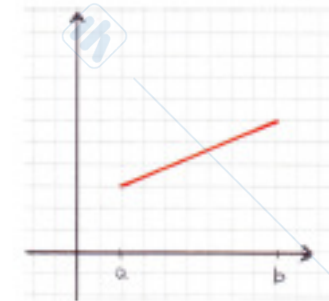
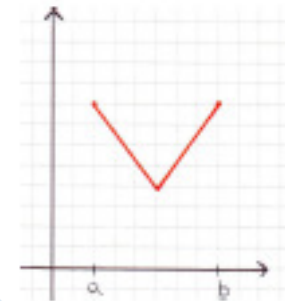
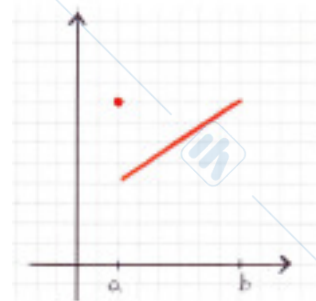
1) Dal punto di vista geometrico, questo vuol dire che esistono punti del grafico in cui la tangente è orizzontale.

2) Possono esistere più punti con tale proprietà, ad esempio:

3) Se solo una delle ipotesi non è verificata la tesi può non essere garantita.



$$f(1) = f(5) = 3, f'(2) = 0, f'(4) = 0$$



Teorema di Lagrange

Teorema di Lagrange:

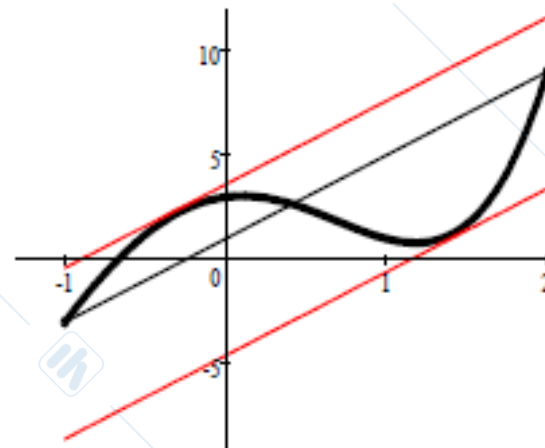
Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) .

$\Rightarrow \exists$ almeno un $c \in [a, b]$ t.c. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Osservazioni:

1) Dal punto di vista geometrico, questo vuol dire che esistono punti del grafico in cui la tangente è parallela alla retta che unisce i punti $A = (a; f(a))$ e $B = (b; f(b))$.

2) Possono esistere più punti con tale proprietà, ad esempio:



Teorema di Lagrange

Corollari:

1) Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) .

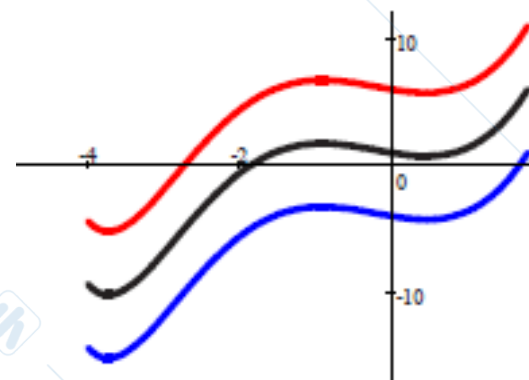
$$\text{Se } f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x) = c \quad \forall x \in [a, b]$$

Le uniche funzioni derivabili con derivata nulla in tutti i punti di un intervallo sono le funzioni costanti.

2) Siano f e g continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) .

$$\text{Se } f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow g(x) = f(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$$

Funzioni con la stessa derivata su un intervallo hanno grafici ottenibili uno dall'altro per traslazioni lungo l'asse y .



$$x^3 + e^{-x}, x^3 + e^{-x} + 5, x^3 + e^{-x} - 5$$

Relazioni tra derivabilità e monotonia

Teorema:

f derivabile su un intervallo I , è strett. crescente su I se e solo se

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$$

f derivabile su un intervallo I , è strett. decrescente su I se e solo se

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$$

Osservazione:

f monotona su un intervallo $I \Rightarrow$ invertibile su I

L'ipotesi che l'insieme di definizione di f sia un intervallo è necessaria: ad esempio la funzione definita da $f(x) = \frac{1}{x}$ se $x \in (-\infty, 0)$ e $f(x) = \frac{1}{x} - 3$ se $x \in (0, +\infty)$, ha derivata sempre negativa (pari a $-\frac{1}{x^2}$) però non è (globalmente) decrescente (lo è su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$, ma non su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$) e nemmeno iniettiva (perché, ad esempio $f(-1) = f(\frac{1}{2}) = -1$).

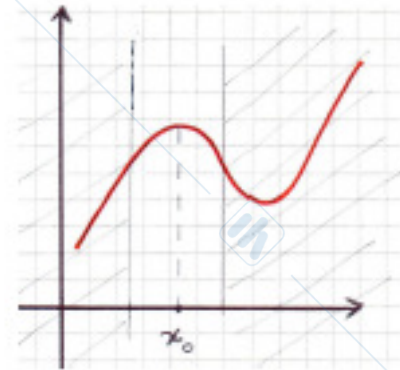
Esercizio: Stabilire se $f(x) = \log\left(\frac{x}{x+1}\right)$ è invertibile nel suo dominio e, in caso affermativo, scrivere l'espressione della funzione inversa.

Punti di massimo e minimo di una funzione

Definizione:

$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ è punto di massimo (minimo) relativo per f quando \exists un suo intorno $I(x_0)$ t.c. :

$$\begin{aligned} f(x_0) &\geq f(x) & \forall x \in A \cap I(x_0) \\ (f(x_0) &\leq f(x)) & \forall x \in A \cap I(x_0) \end{aligned}$$



Definizione:

$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ è punto di massimo (minimo) assoluto per f quando :

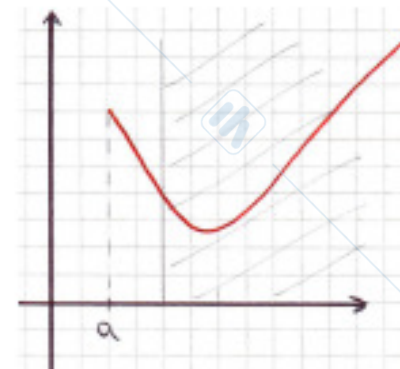
$$\begin{aligned} f(x_0) &\geq f(x) & \forall x \in A & \quad (f(x_0) \leq f(x)) & \forall x \in A \end{aligned}$$

Osservazione:

Se x_0 è agli estremi dell'insieme di definizione, si ottiene un'analogia definizione considerando intorni destri e sinistri.

Ad es. se f è definita in $[a, +\infty]$, il punto $(a, f(a))$ è di massimo relativo se esiste un intorno $I_+(a)$ t.c.

$$\forall x \in I_+(a) \quad \text{si abbia} \quad f(x) \leq f(a)$$



Punti di massimo e minimo di una funzione

Teorema di Fermat:

Sia f derivabile e presenti massimo o minimo in $x_0 \in A$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Osservazioni:

- 1) La condizione è necessaria ma non sufficiente, ad esempio consideriamo:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2, f'(0) = 0$$

$x = 0$ non è massimo o minimo per f

- 2) Ci sono punti di massimo o minimo relativi in cui $f(x)$ non è derivabile come ad esempio in $x = 0$, $f(x) = |x|$
- 3) Ci sono punti non interni di massimo o minimo in cui la derivata destra o sinistra esiste ed è diversa da zero.

Punti di massimo e minimo di una funzione

Definizione:

x_0 si dice punto stazionario se $f'(x_0) = 0$

Un punto stazionario può essere estremo .

Osservazione:

Il teorema precedente esprime una condizione necessaria per l'esistenza di estremanti.

Osservazione:

Per determinare gli estremanti studio il segno della derivata prima.

Esercizi:

1) Determina gli estremanti di: $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

2) Determina gli estremanti di: $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$

precisando se sono relativi o assoluti.

Det. max e min assoluti in $[1, 2]$

Punti di flesso di una funzione

Definizione:

Data f definita su un intervallo I , $x_0 \in I$ è detto punto di flesso per f quando esiste un suo intorno sin. in cui f è convessa e un intorno dx in cui f è concava (o viceversa).

Esercizi:

Determina gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso di :

1) $f(x) = x^3 - 3x^2$

2) $f(x) = x^2 e^x$

Studio di funzione

Ricerca di informazioni utili a disegnare un grafico qualitativo (ma il più possibile attendibile) di una funzione f assegnata.

- Determinazione del campo di esistenza di f
- Studio del segno di f
- Calcolo dei limiti agli estremi del campo di esistenza e determinazione di eventuali asintoti orizzontali, verticali o obliqui
- Intersezione con gli assi
- Calcolo della derivata f'
- Studio del segno di f' e determinazione degli intervalli di monotonia, con eventuali punti di massimo e di minimo.
- Calcolo del valore di f negli eventuali punti di massimo o di minimo trovati
- Determinazione di punti di non derivabilità
- Calcolo della derivata f''
- Studio del segno di f'' e determinazione degli intervalli di convessità, con eventuali punti di flesso.