CONICHE

Esercizi

Esercizio 1. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy sia data la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 + 32\sqrt{3}x = 0.$$

Calcolare le equazioni di una rototraslazione che riduce $\mathcal{C}$ in forma canonica.

Svolgimento. La matrice della forma quadratica dei termini di secondo grado dell'equazione della conica $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}.$$

Per determinare forma canonica e rototraslazione dobbiamo calcolare gli autospazi di A. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 7-t & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5-t \end{vmatrix} = t^2 - 12t + 32 = (t-4)(t-8),$$

quindi gli autovalori di A sono 4 e 8. Per calcolare gli autospazi corrispondenti dobbiamo risolvere i sistemi

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque gli autospazi di A sono $E_A(4) = \mathcal{L}((1, -\sqrt{3}))$, $E_A(8) = \mathcal{L}((\sqrt{3}, 1))$, quindi gli assi del sistema di riferimento canonico sono paralleli ai versori $(\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath})/2$ e $(\sqrt{3}\vec{\imath} + \vec{\jmath})/2$. Poiché $\vec{\hat{\imath}} = (\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath})/2$ e $\vec{\hat{\jmath}} = (\sqrt{3}\vec{\imath} + \vec{\jmath})/2$ hanno già l'orientamento convenzionale essendo la matrice

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

ortogonale speciale, possiamo sceglierli come versori del sistema di riferimento canonico.

Siano $\hat{x}, \hat{y}$ le coordinate nel sistema di riferimento $O\hat{x}\hat{y}$. La rotazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

trasforma l'equazione di $\mathcal{C}$ in

$$4\hat{x}^2 + 8\hat{y}^2 + 16\sqrt{3}\hat{x} + 48\hat{y} = 0$$

Poiché $4(\hat{x}^2 + 4\sqrt{3}\hat{x}) = 4(\hat{x} + 2\sqrt{3})^2 - 48$ e $8(\hat{y}^2 + 6\hat{y}) = 8(\hat{y} + 3)^2 - 72$la traslazione

$$\begin{cases} x' = \hat{x} + 2\sqrt{3} \\ y' = \hat{y} + 3 \end{cases}$$

trasforma l'equazione di $\mathcal{C}$ in $4x'^2 + 8y'^2 = 120$ ovvero

$$\frac{1}{30}x'^2 + \frac{1}{15}8y'^2 = 1.$$