

## SPAZI VETTORIALI

### ESERCIZI

**Esercizio 1.** Sia  $V := \mathbb{R}^3$ . Stabilire quale dei seguenti sottoinsiemi di  $V$  sono suoi sottospazi:

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{ (a, a, a) \in V \mid a \in \mathbb{R} \}, \\ V_2 &:= \{ (a, b, a) \in V \mid a, b \in \mathbb{R} \}, \\ V_3 &:= \{ (a, 2a, a+b) \in V \mid a, b \in \mathbb{R} \}, \\ V_4 &:= \{ (a, b, c) \in V \mid a, b, c \in \mathbb{N} \}, \\ V_5 &:= \{ (a, b, a+b) \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}. \end{aligned}$$

*Svolgimento.* Ricordo che per verificare se  $V_i \subseteq V$  è sottospazio è sufficiente verificare se:

- i)  $0_V \in V_i$ ;
- ii)  $\alpha v \in V_i, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V_i$ ;
- iii)  $v + w \in V_i, \forall v, w \in V_i$ .

Iniziamo a studiare  $V_1$ . Allora i) è soddisfatta se  $a = 0$ . Poi

$$\alpha(a, a, a) = (\alpha a, \alpha a, \alpha a) \in V_1.$$

Infine

$$(a, a, a) + (a', a', a') = (a + a', a + a', a + a') \in V_1.$$

Passiamo a  $V_2$ . Ancora i) è soddisfatta se  $a = b = 0$ . Poi

$$\alpha(a, b, a) = (\alpha a, \alpha b, \alpha a) \in V_2.$$

Infine

$$(a, b, a) + (a', b', a') = (a + a', b + b', a + a') \in V_2.$$

Consideriamo  $V_3$ . i) è soddisfatta se  $a = b = 0$ . Poi

$$\alpha(a, 2a, a+b) = (\alpha a, \alpha 2a, \alpha(a+b)) = (\alpha a, 2(\alpha a), \alpha a + \alpha b) \in V_3.$$

Analogamente

$$(a, 2a, a+b) + (a', 2a', a'+b') = (a+a', 2(a+a'), (a+a')+(b+b')) \in V_3.$$

Concludiamo quindi che  $V_1, V_2, V_3$  sono tre sottospazi.

Studiamo ora l'insieme  $V_4$ . Ricordo che  $\mathbb{N} := \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$ , quindi  $(0, 0, 0) \in V_4$ . Ma se considero  $\alpha \notin \mathbb{N}$  (per esempio  $\alpha = -1$ ), allora  $\alpha(a, b, c) \notin V_4$  (infatti  $-1, -2, \dots \notin \mathbb{N}$ ). Quindi  $V_4$  non è un sottospazio.

Infine studiamo l'insieme  $V_5$ . Ricordo che  $\mathbb{Q}$  è l'insieme dei numeri razionali, cioè di tutte le frazioni  $p/q$  ove  $p, q$  sono numeri interi relativi e  $q \neq 0$ . Allora ancora  $(0, 0, 0) \in V_5$ , ma se  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  (per esempio  $\alpha = \sqrt{2}$ ), allora  $\alpha(a, b, c) \notin V_5$ . Quindi  $V_5$  non è un sottospazio.