

Lezione 22

22.1 Diagonalizzazione ortogonale per matrici simmetriche

La Proposizione 20.10 afferma che ogni matrice simmetrica reale è diagonalizzabile su \mathbb{R} : il risultato principale di questa sezione è che la matrice che diagonalizza può essere scelta ortogonale, cioè tale che $P^{-1} = {}^tP$.

Sia $A \in \text{Sim}_n(\mathbb{R})$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_h \in \mathbb{R}$ i suoi autovalori a due a due distinti. In ciascuno degli autospazi $E_A(\lambda_j)$ fissiamo una base, diciamo $\mathcal{B}_j = (P_{j,1}, \dots, P_{j,m_j})$, dove $m_j = m_a(\lambda_j, A) = m_g(\lambda_j, A)$. Per la Proposizione 21.14, \mathcal{B}_j può essere supposta ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di \mathbb{R}^n .

Osserviamo che autovettori di A relativi ad autovalori distinti sono fra loro ortogonali. Infatti, se $P_i \in E_A(\lambda_i)$ e $P_j \in E_A(\lambda_j)$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$, allora

$$\lambda_j {}^tP_i P_j = {}^tP_i (\lambda_j P_j) = {}^tP_i (AP_j) = {}^tP_i AP_j = {}^tP_i {}^tAP_j = {}^t(AP_i) P_j = \lambda_i {}^tP_i P_j,$$

quindi $(\lambda_j - \lambda_i) {}^tP_i P_j = 0$. Poiché $\lambda_j \neq \lambda_i$, segue $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$, dunque deve valere ${}^tP_i P_j = 0$.

Queste considerazioni ci permettono di affermare che è sempre possibile trovare una base ortonormale di autovettori di A , ovvero una matrice ortogonale $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

Proposizione 22.1. *Sia $A \in \text{Sim}_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica reale. Allora esiste una matrice ortogonale $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $P^{-1}AP = {}^tPAP$ sia diagonale. La matrice P può essere scelta speciale.*

Illustriamo quanto detto con un esempio.

Esempio 22.2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Come già visto nell'Esempio 20.11, gli autovalori di A sono -1 e 2 , con autospazi

$$E_A(-1) = \mathcal{L}((1, -1, 0), (1, 0, -1)), \quad E_A(2) = \mathcal{L}((1, 1, 1)).$$

Per ottenere una matrice ortogonale P che diagonalizzi A è necessario determinare tre autovettori P_1, P_2, P_3 ortonormali. A tale scopo basta determinare basi ortonormali in $E_A(-1)$ e $E_A(2)$. Per quanto riguarda $E_A(2)$, è sufficiente scegliere in esso un versore, ad esempio consideriamo

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Per l'autospazio $E_A(-1)$ invece il discorso è un po' più complicato. Iniziamo a determinare un versore, per esempio

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0).$$

Per determinare P_3 cerchiamo $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che i vettori P_2 e

$$X_\alpha = (1, -1, 0) + \alpha(1, 0, -1)$$

siano ortogonali. Si ha che $\langle P_2, X_\alpha \rangle = (2 + \alpha)/\sqrt{2}$. Affinché $\langle P_2, X_\alpha \rangle = 0$ si deve avere che $\alpha = -2$, dunque possiamo scegliere

$$P_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2).$$

Si noti che questo procedimento è, in realtà, equivalente a trovare una base qualsiasi di $E_A(-1)$ ed applicare l'algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt visto nella Proposizione 21.14. Quindi la matrice ortogonale cercata è

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

P è non speciale e risulta

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per esercizio si verifichi invece che

$$P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

è speciale e che ancora risulta

$$P'^{-1}AP' = {}^tP'AP' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \spadesuit$$

22.2 Forme quadratiche reali

Nella Lezione 21 abbiamo visto due esempi di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su \mathbb{R}^n e in entrambi i casi abbiamo verificato l'esistenza di una matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ simmetrica tale che

$$\langle x, y \rangle = {}^t x A y \quad (22.2.1)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Viceversa, data una matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, si consideri l'applicazione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

definita dalla formula (22.2.1): per le proprietà dei prodotti di matrici le proprietà (PS2) e (PS3) della Definizione 21.1 sono banalmente soddisfatte. Per quanto riguarda (PS1) si noti che, poiché ${}^t x A y \in \mathbb{R}$ ed A è simmetrica, segue

$$\langle x, y \rangle = {}^t x A y = {}^t ({}^t x A y) = {}^t y {}^t A x = {}^t y A x = \langle y, x \rangle.$$

L'unica condizione di non immediata verifica è (PS4), cioè che vale ${}^t x A x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Si noti che ${}^t x A x$ è un polinomio di grado 2 omogeneo nelle entrate di $x = (x_1, \dots, x_n)$ della forma

$$\begin{aligned} & (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n \end{pmatrix} = \\ & = a_{1,1}x_1^2 + \dots + a_{1,n}x_1x_n + a_{2,1}x_2x_1 + \dots + a_{2,n}x_2x_n + \dots + a_{n,n}x_n^2. \end{aligned}$$

Poiché $a_{i,j} = a_{j,i}$ e $x_i x_j = x_j x_i$ per $i, j = 1, \dots, n$, segue che

$${}^t x A x = a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + \dots + 2a_{1,n}x_1x_n + a_{2,2}x_2^2 + 2a_{2,3}x_2x_3 + \dots + a_{n,n}x_n^2.$$

Quindi determinare se l'applicazione $(x, y) \mapsto {}^t x A y$ è un prodotto scalare equivale a studiare il segno del polinomio $q(x) = {}^t x A x$ al variare di $x \in \mathbb{R}^n$.

Definizione 22.3 (Forme quadratiche reali). Una *forma quadratica reale* q nelle variabili x_1, \dots, x_n è un polinomio $q(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ omogeneo di grado due.

Possiamo riformulare quanto abbiamo visto sopra dicendo che ogni matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ definisce una forma quadratica reale $q(x) = {}^t x A x$ in n variabili. Vale anche il viceversa: infatti, data la forma quadratica

$$q(x_1, \dots, x_n) = q_{1,1}x_1^2 + q_{1,2}x_1x_2 + \dots + q_{1,n}x_1x_n + q_{2,2}x_2^2 + q_{2,3}x_2x_3 + \dots + q_{n,n}x_n^2,$$

consideriamo la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} q_{i,i} & \text{se } i = j, \\ q_{i,j}/2 & \text{se } i < j, \\ q_{j,i}/2 & \text{se } i > j. \end{cases} \quad (22.2.2)$$

Ovviamente A è simmetrica ed è immediato verificare che $x A^t x = q(x)$: inoltre A è l'unica matrice simmetrica con tale proprietà.

Definizione 22.4 (Matrice associata ad una forma quadratica reale). Sia q una forma quadratica reale nelle variabili x_1, \dots, x_n .

La matrice simmetrica $A \in \text{Sim}_n(\mathbb{R})$ definita dalla formula (22.2.2) viene detta la *matrice associata a q* .

Esempio 22.5. Si consideri la forma quadratica

$$q(t, x, y, z) = 2t^2 - y^2 + 3tx + tz - xy + 2xz + 9yz.$$

La matrice associata a q è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1 & 9/2 \\ 1/2 & 1 & 9/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

22.3 Forme quadratiche definite

Definizione 22.6 (Forme quadratiche definite). Sia q una forma quadratica reale in n variabili e sia $A \in \text{Sim}_n(\mathbb{R})$ la sua matrice associata. Allora:

- (DP) q ed A si dicono *definite positive* se $q(x) = {}^t x A x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$;
- (SDP) q ed A si dicono *semidefinite positive* se $q(x) = {}^t x A x \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$;
- (DN) q ed A si dicono *definite negative* se $q(x) = {}^t x A x < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$;
- (SDN) q ed A si dicono *semidefinite negative* se $q(x) = {}^t x A x \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$;
- (ID) q ed A si dicono *indefinite* nei rimanenti casi, cioè se esistono $x', x'' \in \mathbb{R}^n$ tali che $q(x') = {}^t x' A x' > 0$ e $q(x'') = {}^t x'' A x'' < 0$.

È chiaro che la forma quadratica q e la sua matrice A sono definite o semidefinite negative se e solo se $-q$ e la sua matrice $-A$ sono definite o semidefinite positive rispettivamente.

Osserviamo che alla luce della Definizione 22.6 il problema di stabilire se l'applicazione $(x, y) \mapsto {}^t x A y$ è un prodotto scalare è equivalente a quello di stabilire se A è definita positiva o meno.

Esempio 22.7. In $\mathbb{R}^{2,2}$ si considerino le matrici

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad -E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_{1,1} - E_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha che I_2 è definita positiva, $E_{1,1}$ è semidefinita positiva, $-E_{1,1}$ è semidefinita negativa, $E_{1,1} - E_{2,2}$ è indefinita. L'affermazione per I_2 è ovvia. Per quanto riguarda $E_{1,1}$ si ha che $q(x) = xE_{1,1}^t x = x_1^2$: dunque $q(0,1) = 0$. In maniera simile si procede per $-E_{2,2}$. Infine $q(x) = x(E_{1,1} - E_{2,2})^t x = x_1^2 - x_2^2$: dunque $q(1,0) > 0$ e $q(0,1) < 0$. ♠

Più in generale si ha il seguente ovvio risultato.

Proposizione 22.8. *Sia data la matrice diagonale $D \in \mathbb{R}^{n,n}$ con entrate diagonali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Allora:*

- (i) D è definita positiva se e solo se $\lambda_i > 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$;
- (ii) D è semidefinita positiva se e solo se $\lambda_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$;
- (iii) D è definita negativa se e solo se $\lambda_i < 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$;
- (iv) D è semidefinita negativa se e solo se $\lambda_i \leq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$;
- (v) D è indefinita se e solo se esistono $i, j = 1, \dots, n$ tali che $\lambda_i > 0$ e $\lambda_j < 0$.

⚠ Per una matrice simmetrica qualsiasi non è possibile determinare il segno a partire dal segno dei suoi coefficienti come nel caso delle matrici diagonali. Per esempio, vedremo in seguito che la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è definita positiva, mentre

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

è indefinita.

Per determinare il segno di una matrice simmetrica A procediamo con *cambiamenti di variabili*. Più in dettaglio, sia $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice invertibile e si consideri la trasformazione in \mathbb{R}^n definita da

$$x = P\bar{x}$$

o, equivalentemente,

$$\bar{x} = P^{-1}x.$$

Definiamo la nuova forma quadratica $\bar{q}(\bar{x}) = q(P\bar{x})$ nella variabile \bar{x} .

Il segno delle forme quadratiche \bar{q} e q è lo stesso: infatti $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ soddisfa $\bar{q}(\bar{x}) > 0$ se e solo se $x = P\bar{x}$ soddisfa $q(x) > 0$, poiché per definizione

$$\bar{q}(\bar{x}) = q(P\bar{x}) = q(x).$$

Un ragionamento simile si può fare per dimostrare che $q(x) = 0$ (rispettivamente $q(x) < 0$) se e solo se $\bar{q}(\bar{x}) = 0$ (rispettivamente $\bar{q}(\bar{x}) < 0$).

Studiamo l'azione di un tale cambiamento di variabili sulla matrice A di q . Dal momento che $x = P\bar{x}$ e, quindi, ${}^t x = {}^t \bar{x} {}^t P$, si ha

$${}^t x A x = {}^t (P \bar{x}) A (P \bar{x}) = {}^t \bar{x} {}^t P A P \bar{x} = {}^t \bar{x} ({}^t P A P) \bar{x}.$$

La matrice ${}^t P A P$ è simmetrica: infatti

$${}^t ({}^t P A P) = {}^t P {}^t A P = {}^t P A P,$$

in forza della simmetria di A . Concludiamo, quindi, che la matrice di \bar{q} è $\bar{A} = {}^t P A P$.

Definizione 22.9 (Matrici congruenti). Siano $A, \bar{A} \in \text{Sim}_n(\mathbb{R})$.

Le matrici A e \bar{A} si dicono *congruenti*, e si scrive $A \approx \bar{A}$, se esiste $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile tale che $\bar{A} = {}^t P A P$.

Esempio 22.10. Si consideri la forma quadratica

$$q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz.$$

La sua matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per capire se q e A sono o meno definite, si consideri la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

È facile verificare che P è invertibile: inoltre

$$\bar{A} = {}^t P A P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

In particolare q ed A non sono definite perché per la Proposizione 22.8 \bar{A} non è definita. ♠

L'esempio precedente mostra quanto sia semplice stabilire il segno di una matrice $A \in \text{Sim}_n(\mathbb{R})$ se si è in grado di determinare una matrice $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile tale che ${}^t P A P$ sia diagonale. Sono vari gli algoritmi che si possono utilizzare a tale scopo. Uno di essi si basa sulla Proposizione 22.1.

Infatti sappiamo che ogni matrice simmetrica reale A è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale P : poiché, per una tale matrice $P^{-1} = {}^t P$, segue che le matrici A e $\bar{A} = P^{-1} A P = {}^t P A P$ sono congruenti. In particolare A è congruente ad una matrice diagonale avente sulla diagonale gli autovalori di A ciascuno ripetuto con la sua molteplicità algebrica. Quindi il problema della determinazione del segno di A si può ridurre alla determinazione del segno dei suoi autovalori.

Esempio 22.11. Consideriamo la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$p_{A_1}(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 3 = (t-3)(t-1),$$

quindi A_1 ha autovalori 1 e 3: in particolare, in base a quanto osservato sopra, A_1 è definita positiva.

Se invece consideriamo la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

essa ha polinomio caratteristico

$$p_{A_2}(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1),$$

quindi autovalori -1 e 3 . In particolare, in base a quanto osservato sopra, A_2 è indefinita. ♠

Abbiamo avuto modo di osservare che il calcolo degli autovalori di una matrice può essere particolarmente complicato poiché non vi sono modi semplici per calcolare le radici di un polinomio generale di grado n . In realtà, però, per determinare se una matrice simmetrica reale è definita o meno a noi non interessa il valore numerico degli autovalori ma solo il loro segno e questo può essere facilmente determinato utilizzando la cosiddetta *regola dei segni di Cartesio*.

Per illustrare tale metodo dobbiamo introdurre la nozione di variazione di una successione di numeri reali.

Definizione 22.12. Sia $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ una successione di numeri reali.

Il *numero di variazioni* $v(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ è il numero delle coppie di interi $(i, i+k)$ con $k \geq 1$ tali che

1. $a_i a_{i+k} < 0$;
2. $a_{i+h} = 0$ per $h = 1, k-1$.

Per ogni polinomio a coefficienti reali $p(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n \in \mathbb{R}[t]$ poniamo $v(p(t)) = v(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$.

Esempio 22.13. Per esempio, $v(-t^6 + t^5 - t^2 + t + 1) = v(-1, 1, 0, 0, -1, 1, 1) = 3$. ♠

Siamo pronti per enunciare la regola dei segni di Cartesio, di cui omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 22.14 (Regola dei segni di Cartesio). *Se tutte le radici di un polinomio $p(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n \in \mathbb{R}[t]$ sono reali, allora $v(p(t))$ è il numero delle sue radici positive contate con la loro molteplicità.*

Si osservi che tale proposizione non ci permette di dire nulla sul segno delle radici del polinomio dell'Esempio 22.13, perchè non sappiamo a priori che le sue radici sono tutte reali. Se però consideriamo il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica reale, sappiamo che esso ha tutte le radici in \mathbb{R} , grazie alla Proposizione 20.10.

Esempio 22.15. Riprendiamo la matrice A dell'Esempio 22.10

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è $p_A(t) = -t^3 + 3t + 2$, dunque il numero di radici positive di $p_A(t)$ è $v(-1, 0, 3, 2) = 1$: poiché $p_A(t)$ non ha la radice nulla ed ha tre radici reali (perché è polinomio caratteristico di una matrice simmetrica che è diagonalizzabile!), segue che $p_A(t)$ ha $3 - 1 = 2$ radici negative: infatti gli autovalori di A sono 2 e -1 con $m_a(2, A) = 1$ e $m_a(-1, A) = 2$ (si veda l'Esempio 20.11). ♠