

(2) Siano

$$w_1 := (1, 0, 1), \quad w_2 := (1, 1, 0), \quad w_3 := (1, 0, 0).$$

Verificare che $C := (w_1, w_2, w_3)$ è una base di W .

(3) Si dimostra che esiste un'unica applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ tale che

$$\begin{aligned} f(v_1) &:= w_1 + w_3, & f(v_2) &:= -w_1 + w_2, \\ f(v_3) &:= w_3, & f(v_4) &:= 3w_1 + 2w_2 - w_3. \end{aligned}$$

Determinare $M(f)$.

Svolgimento. Per verificare che B è una base procediamo calcolando il rango della matrice avente le componenti dei vettori come righe. Tale matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 4 (si noti che la matrice è ridotta per colonne).

Analogamente C è una base. Infatti la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 (è ridotta per colonne).

Per calcolare $M(f)$ si può procedere sfruttando la linearità di f e calcolando $f(e_i)$. Risulta

$$\begin{aligned} e_1 &= v_1, & e_2 &= -v_1 + v_4, \\ e_3 &= 2v_1/5 + v_2/5 - 3v_4/5, & e_4 &= -3v_1/5 + v_2/5 + v_3 - 13v_4/5, \end{aligned}$$

quindi si ottiene

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(v_1) = w_1 + w_3 = (2, 0, 1), \\ f(e_2) &= f(-v_1 + v_4) = 2w_1 + 2w_2 - 2w_3 = (2, 2, 2), \\ f(e_3) &= f(2v_1/5 + v_2/5 - 3v_4/5) = -8w_1/5 - w_2 + w_3 = (-8/5, -1, -8/5), \\ f(e_4) &= f(-3v_1/5 + v_2/5 + v_3 - 13v_4/5) = \\ &= -43w_1/5 - 5w_2 + 3w_3 = (-53/5, -5, -43/5). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (2, 0, 1), & f(e_2) &= (2, 2, 2), \\ f(e_3) &= (-8/5, -1, -8/5), & f(e_4) &= (-21/5, -17/5, 5). \end{aligned}$$

Concludiamo allora che

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8/5 & -21/5 \\ 0 & 2 & -1 & -17/5 \\ 1 & 2 & -8/5 & 5 \end{pmatrix}.$$