Lezione 25

25.1 Quadriche e loro riduzione a forma canonica

Fissiamo nello spazio un sistema di riferimento $Oxyz$ e consideriamo un polinomio $q(x, y, z)$ di grado 2 nelle tre variabili x, y, z a meno di costanti moltiplicative non nulle.

Sulla falsariga di quanto fatto nella lezione precedente, vogliamo descrivere il luogo geometrico (eventualmente vuoto)

$$\mathcal{Q} = \{ \ P = (x, y, z) \mid q(x, y, z) = 0 \ \}.$$

Definizione 25.1 (Quadriche). Una *quadrica* nello spazio (rispetto ad un fissato sistema di riferimento $Oxyz$) è il dato, a meno di costanti moltiplicative non nulle, di un'equazione della forma

$$\begin{aligned} a_{1,1}x^2 + a_{2,2}y^2 + a_{3,3}z^2 + 2a_{1,2}xy + 2a_{1,3}xz + 2a_{2,3}yz \\ + 2a_{1,4}x + 2a_{2,4}y + 2a_{3,4}z + a_{4,4} = 0 \end{aligned} \tag{25.1.1}$$

per opportuni $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ non simultaneamente nulli.

Anche in questo caso spesso parleremo della *quadrica di equazione* (25.1.1). Come abbiamo fatto per le coniche, ad una quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione (25.1.1) possiamo associare due matrici simmetriche

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} \end{pmatrix},$$

dette rispettivamente *matrice dei termini di secondo grado della quadrica* e *matrice (completa) della quadrica.*

Si noti che l'equazione di $\mathcal{Q}$ si può scrivere come prodotto

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Come per le coniche, vorremmo trovare un sistema di riferimento $O'x'y'z'$ nello spazio in modo tale che l'equazione (25.1.1) divenga più semplice e, soprattutto, riconoscibile: per esempio potremmo desiderare d'avere un'equazione canonica nel senso della seguente definizione.

Definizione 25.2 (**Forma canonica di una quadrica**)**.** Nello spazio sia fissato un sistema di riferimento $Oxyz$ e sia $\mathcal{Q}$ una quadrica.

Diciamo che $\mathcal{Q}$ è in *forma canonica* (o che $Oxyz$ è un *sistema di riferimento canonico* per $\mathcal{Q}$) se l'equazione di $\mathcal{Q}$ è della forma

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta, \tag{25.1.2}$$

oppure

$$\beta y^2 + \gamma z^2 = 2\delta x \tag{25.1.3}$$

per qualche $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Vogliamo passare dal "vecchio riferimento" $Oxyz$ a un "nuovo riferimento" $O'x'y'z'$ rispetto a cui $\mathcal{Q}$ sia in forma canonica tramite una *rototraslazione*, cioè una trasformazione di coordinate del tipo

$$\begin{cases} x = p_{1,1}x' + p_{1,2}y' + p_{1,3}z + u \\ y = p_{2,1}x' + p_{2,2}y' + p_{2,3}z + v \\ z = p_{3,1}x + p_{3,2}y + p_{3,3}z + w, \end{cases} \tag{25.1.4}$$

che ci permetta di passare dall'equazione (25.1.1) ad una tra le equazioni (25.1.2) o (25.1.3).

La trasformazione (25.1.4) può essere pensata come composta dalle due trasformazioni

$$\begin{cases} x = \widehat{x} + u \\ y = \widehat{y} + v \\ z = \widehat{z} + w, \end{cases}$$

che rappresenta una traslazione nello spazio, e

$$\begin{cases} \widehat{x} = p_{1,1}x' + p_{1,2}y' + p_{1,3}z' \\ \widehat{y} = p_{2,1}x' + p_{2,2}y' + p_{2,3}z' \\ \widehat{z} = p_{3,1}x + p_{3,2}y + p_{3,3}z', \end{cases}$$

che, invece, vogliamo rappresenti una rotazione che fissi l'origine: anche in questo caso si può dimostrare che $P = (p_{i,j})_{i,j=1,2,3}$ è una matrice ortogonale speciale e che esistono tre angoli φ, ψ, ϑ (detti angoli di Eulero) tali che le entrate di P siano somme di opportuni prodotti di funzioni tipo coseno e seno di tali angoli.

La Proposizione 24.4 può essere facilmente generalizzata al caso delle quadriche come segue.

Proposizione 25.3. *Nel piano siano fissati due sistemi di riferimento* $Oxyz$ *e* $O'x'y'z'$ *per cui vale la relazione* (25.1.4) *e siano*

$$Q = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & u \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & v \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Sia poi $\mathcal{Q}$ una quadrica avente nei due sistemi di riferimento matrici complete B e B' e matrici dei termini di grado 2 A ed A' rispettivamente. Allora $B' = {}^tQBQ$ e $A' = {}^tPAP$.

Definizione 25.4. Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica rappresentata dalla matrice B.

Definiamo *rango di* $\mathcal{Q}$ come il rango della matrice B. La quadrica $\mathcal{Q}$ si dice *non degenere* se il suo rango è 4, *degenere* in caso contrario. Se $\mathcal{Q}$ è non degenere si dice *a centro* se il determinante della matrice del complesso dei termini di secondo grado è non nullo, *paraboloide* in caso contrario.

Osservazione 25.5. Poiché valgono le relazioni $B' = {}^tQBQ$ e $A' = {}^tPAP$, segue che $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(B')$ e $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A')$. Concludiamo che il fatto che una quadrica $\mathcal{Q}$ sia degenere o meno, oppure che sia a centro o meno, non dipende dal sistema di riferimento, ma è una proprietà geometrica.

Esempio 25.6. Si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione

$$-2xz + y^2 - \sqrt{2}x - 2y - \sqrt{2}z - 1 = 0,$$

con matrici associate

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -1 & -\sqrt{2}/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo $\det(A) = -1$, $\det(B) = 1$: quindi $\mathcal{Q}$ è una quadrica a centro. In particolare è non degenere. ♠

Dalla trattazione risulta chiaro che, data una quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione (25.1.1), per determinare una sua equazione canonica si può procedere come nel caso delle coniche.

Si determina prima una matrice ortogonale speciale che diagonalizzi la matrice A del complesso dei termini di secondo grado. In questo modo l'equazione di $\mathcal{Q}$ viene trasformata in una della forma

$$\widehat{a}_{1,1}\widehat{x}^2 + \widehat{a}_{2,2}\widehat{y}^2 + \widehat{a}_{3,3}\widehat{z}^2 + 2\widehat{a}_{1,4}\widehat{x} + 2\widehat{a}_{2,4}\widehat{y} + 2\widehat{a}_{3,4}\widehat{z} + \widehat{a}_{3,3} = 0.$$

Questa prima trasformazione è una rotazione intorno al punto O.

Poi con trasformazioni del tipo $(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) \mapsto (x' + a, y' + b, z' + c)$ si fa in modo che scompaiano il maggior numero possibile di monomi di grado 1 e, eventualmente, il termine noto. L'equazione risultante è in forma canonica ed è del tipo

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta, \tag{25.1.2}$$

nel caso in cui $\det(A) \neq 0$, oppure del tipo

$$\beta y^2 + \gamma z^2 = 2\delta x, \tag{25.1.3}$$

nel caso in cui invece $\det(A) = 0$. Osserviamo che la seconda trasformazione è una traslazione che ci fa passare dal sistema di riferimento ausiliario $O\widehat{x}\widehat{y}\widehat{z}$ al nuovo sistema di riferimento $Oxyz$.

25.2 Classificazione delle quadriche

Per classificare e disegnare le quadriche si procede come nel caso delle coniche classiche, intersecando con opportuni piani paralleli ai piani coordinati.

Caso delle quadriche a centro.

Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica a centro con matrici associate A e B. Poiché $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$, l'equazione canonica di $\mathcal{Q}$ deve essere della forma

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta \tag{25.1.2}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$. Si può sempre supporre che $\delta > 0$; di seguito analizziamo i vari casi possibili.

• Se $\alpha, \beta, \gamma > 0$, allora posto $a^2 = \delta/\alpha$, $b^2 = \delta/\beta$, $c^2 = \delta/\gamma$, possiamo sostituire l'equazione (25.1.2) con

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

In tal caso, $\mathcal{Q}$ risulta essere simmetrica sia rispetto all'origine O, che rispetto a qualsiasi asse coordinato e rispetto a qualsiasi piano coordinato.

Per determinare l'intersezione di $\mathcal{Q}$ con i piani paralleli al piano yz dobbiamo studiare il sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \\ x = k \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Ci riduciamo perciò a studiare la corrispondente curva di livello

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

nel piano yz, proiezione ortogonale su tale piano della conica intersezione di $\mathcal{Q}$ con il piano di equazione $x = k$.

Con questo in mente, l'equazione di cui sopra rappresenta un'ellisse se $|k| < a$, un punto se $|k| = a$ ed un'ellisse immaginaria se $|k| > a$.

Procedendo similmente con gli altri piani coordinati, concludiamo che il luogo rappresentato da $\mathcal{Q}$ è contenuto nel parallelepipedo $[-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c]$: la quadrica $\mathcal{Q}$ è detta *ellissoide* ed è raffigurata in Figura 25.1.

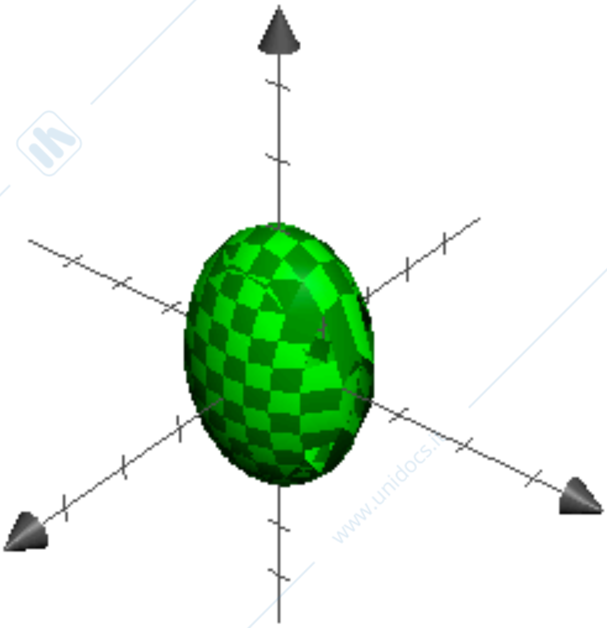

Figura 25.1

• Se $\alpha, \beta > 0$, $\gamma < 0$, allora posto $a^2 = \delta/\alpha$, $b^2 = \delta/\beta$, $c^2 = -\delta/\gamma$, possiamo sostituire l'equazione (25.1.2)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Come nel caso precedente, $\mathcal{Q}$ è simmetrica rispetto all'origine O, rispetto a qualsiasi asse coordinato e rispetto a qualsiasi piano coordinato. Intersecando con i piani paralleli al piano yz otteniamo la curva di livello

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

nel piano di equazione yz: tale conica è un'iperbole con asse reale coincidente con l'asse delle y se $|k| < a$, con asse delle z se $|k| > a$. Se $|k| = a$ la conica viene ad essere una coppia iperbolica di rette. Un discorso simile si può fare intersecando $\mathcal{Q}$ con piani paralleli al piano xz.

Invece, intersecando $\mathcal{Q}$ con un piano parallelo al piano xy otteniamo la curva di livello

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

nel piano di equazione xy: tale conica è sempre un'ellisse: la quadrica $\mathcal{Q}$ è detta *iperboloide iperbolico* o *iperboloide ad una falda*, raffigurato in Figura 25.2.

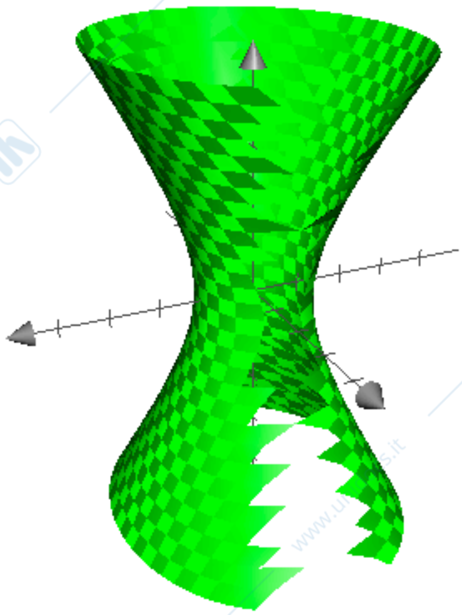

Figura 25.2

Si noti che l'identità
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$
ci permette di affermare che per ogni coppia di numeri reali non contemporaneamente nulli λ, μ si ha
$$\lambda\mu\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) \cdot \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = \lambda\mu\left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right),$$
quindi i punti dello spazio che soddisfano simultaneamente le equazioni di grado 1
$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \mu\left(1 - \frac{x}{a}\right) \\ \mu\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 + \frac{x}{a}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \mu\left(1 + \frac{x}{a}\right) \\ \mu\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \frac{x}{a}\right) \end{cases}$$
soddisfano anche l'equazione di $\mathcal{Q}$. È facile verificare che tali sistemi descrivono due famiglie di rette nello spazio: in particolare $\mathcal{Q}$ contiene infinite rette.

• Se $\alpha > 0$ e $\beta, \gamma < 0$, allora posto $a^2 = \delta/\alpha$, $b^2 = -\delta/\beta$, $c^2 = -\delta/\gamma$, possiamo sostituire l'equazione (25.1.2) con
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$
Ancora $\mathcal{Q}$ è simmetrica rispetto all'origine O, rispetto a qualsiasi asse coordinato e rispetto a qualsiasi piano coordinato. Intersecando con i piani paralleli al piano yz otteniamo la curva di livello
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 + \frac{k^2}{a^2}$$

nel piano di equazione $x = k$: tale conica è un'ellisse se $|k| > a$, un'ellisse immaginaria se $|k| < a$. Se $|k| = a$ la conica viene ad essere una coppia ellittica di rette. In particolare $\mathcal{Q}$ è esterna alla banda infinita $]-a, a[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e consiste di due componenti connesse simmetriche.

Invece, intersecando $\mathcal{Q}$ con un piano parallelo al piano xy otteniamo la curva di livello

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

nel piano di equazione $z = k$: tale conica è sempre un'iperbole con asse reale coincidente con l'asse delle x. Un discorso simile si può fare intersecando $\mathcal{Q}$ con piani paralleli al piano xz. La quadrica $\mathcal{Q}$ è detta *iperboloide ellittico* o *iperboloide a due falde*, raffigurato in Figura 25.3.

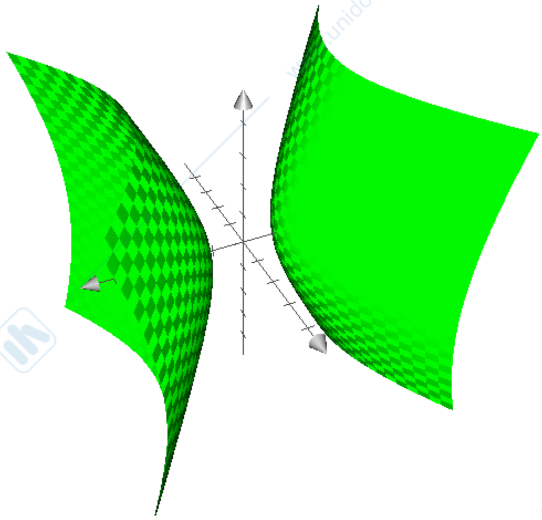

Figura 25.3

- Se $\alpha, \beta, \gamma < 0$, allora posto $a^2 = -\delta/\alpha$, $b^2 = -\delta/\beta$, $c^2 = -\delta/\gamma$, possiamo sostituire l'equazione (25.1.2)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

In tal caso, intersecando $\mathcal{Q}$ con i piani paralleli al piano yz otteniamo la curva di livello

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{k^2}{a^2}$$

nel piano di equazione $x = k$, che è sempre un'ellisse immaginaria. La stessa cosa accade intersecando con gli altri piani coordinati: $\mathcal{Q}$ è detta *ellissoide immaginario*.

Caso dei paraboloidi.

Sia $\mathcal{Q}$ un paraboloide con matrici associate A e B. Poiché $\det(A) = 0$, ma $\det(B) \neq 0$, l'equazione canonica di $\mathcal{Q}$ deve essere della forma

$$\beta y^2 + \gamma z^2 = 2\delta x \tag{25.1.3}$$

con $\beta, \gamma, \delta \neq 0$. Si può sempre supporre che $\delta > 0$; di seguito analizziamo i vari casi possibili.

• Se $\beta, \gamma > 0$, allora, $b^2 = \delta/\beta$, $c^2 = \delta/\gamma$, possiamo sostituire l'equazione (25.1.3) con

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2x.$$

$\mathcal{Q}$ è simmetrica rispetto all'asse delle ascisse e rispetto ai piani coordinati xy e xz. Intersecandola con i piani di equazione $x = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, ci riduciamo a studiare la curva di livello

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2k$$

nel piano di equazione $x = k$: tale conica è un'ellisse se $|k| > 0$, un'ellisse immaginaria se $|k| < 0$. Se $|k| = 0$ la conica viene ad essere una coppia ellittica di rette. In particolare $\mathcal{Q}$ è contenuta nel semispazio $[0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano xy otteniamo invece

$$\frac{y^2}{b^2} = 2x,$$

che è una parabola con asse coincidente con l'asse delle ascisse. Un discorso simile si può fare intersecando $\mathcal{Q}$ con gli altri piani passanti per l'asse delle ascisse di equazione $z = \lambda y$, ottenendo

$$\frac{c^2 + \lambda^2 b^2}{b^2 c^2} y^2 = 2x,$$

che è ancora una parabola. La quadrica $\mathcal{Q}$ è detta *paraboloide ellittico*, raffigurato in Figura 25.4.

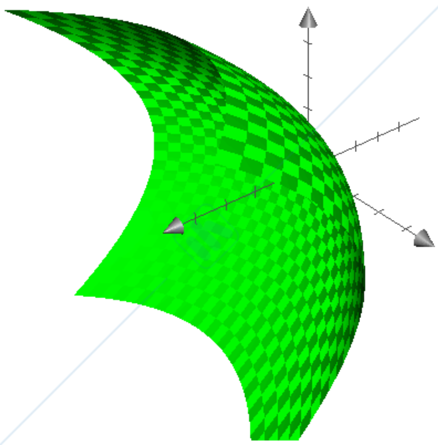

Figura 25.4

• Se vale $\beta > 0$ e $\gamma < 0$, allora posto $b^2 = \delta/\beta$ e $c^2 = -\delta/\gamma$, possiamo sostituire l'equazione (25.1.3) con

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2x.$$

$\mathcal{Q}$ è simmetrica rispetto all'asse delle ascisse e rispetto ai piani coordinati xy e xz. Intersecando con i piani paralleli al piano yz otteniamo la curva di livello

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2k$$

nel piano di equazione $x = k$: tale conica è un'iperbole con asse reale coincidente con l'asse delle ordinate se $|k| > 0$, un'iperbole con asse reale coincidente con l'asse delle quote se $|k| < 0$. Se $|k| = 0$ la conica viene ad essere una coppia iperbolica di rette.

Intersecando $\mathcal{Q}$ con piani contenenti l'asse delle ascisse otteniamo delle parabole il cui asse ancora coincide con l'asse delle ascisse. $\mathcal{Q}$ in questo caso è detta *paraboloide iperbolico*, raffigurato in Figura 25.5.

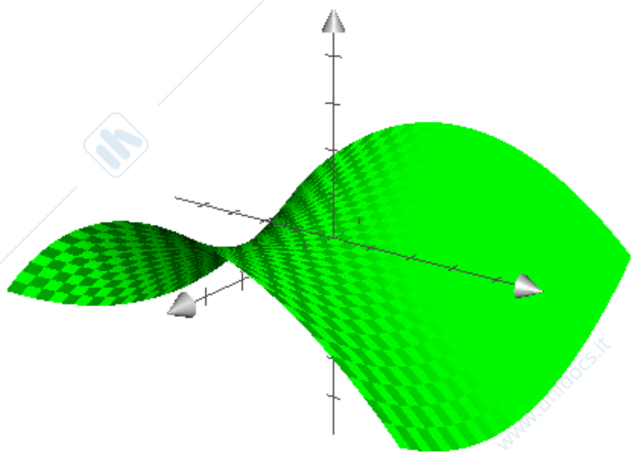

Figura 25.5

Con la stessa procedura descritta nel caso dell'iperboloide ellittico, si verifica l'identità

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

ci permette di affermare che per ogni coppia di numeri reali non contemporaneamente nulli λ, μ si ha

$$\lambda\mu\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) \cdot \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = \lambda\mu\left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right),$$

quindi i punti dello spazio che soddisfano simultaneamente le equazioni di grado 1

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=2\mu \\ \mu\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\lambda x \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\mu x \\ \mu\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=2\lambda \end{cases}$$

soddisfano anche l'equazione di $\mathcal{Q}$ per ogni scelta di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non simultaneamente nulli. In particolare $\mathcal{Q}$ contiene infinite rette.

Caso delle quadriche degeneri.

Ci limiteremo a considerare le quadriche degeneri di rango 3.

Caso dei coni.

Consideriamo prima il caso

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0,$$

con $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ (la quadrica allora è detta *cono*).

- Se $\alpha, \beta > 0$ e $\gamma < 0$, $\mathcal{Q}$ è simmetrica rispetto all'asse delle quote e rispetto ai piani coordinati xz e yz. Intersecando con i piani paralleli al piano xy otteniamo la curva di livello

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = -\gamma k^2 :$$

tale conica è un'ellisse se $k \neq 0$, una coppia ellittica di rette se $k = 0$. Invece intersecando $\mathcal{Q}$ con il piano xz otteniamo

$$\alpha x^2 + \gamma z^2 = 0,$$

che è una coppia iperbolica di rette passanti per l'origine O $(\gamma < 0)$.

Un discorso simile si può fare intersecando $\mathcal{Q}$ con gli altri piani passanti per l'asse delle quote di equazione $x = \lambda y$, ottenendo

$$(\alpha + \beta\lambda^2)x^2 + \gamma z^2 = 0,$$

che è ancora una coppia iperbolica di rette passanti per l'origine O. Il cono $\mathcal{Q}$ è raffigurato in Figura 25.6.

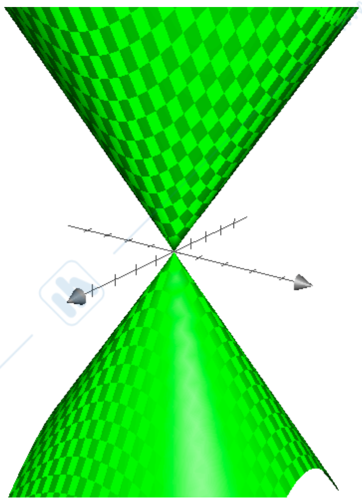

Figura 25.6

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Si osservi che in questo caso $\mathcal{Q}$ può essere pensata come l'unione delle rette passanti per l'origine che si appoggiano all'ellisse del piano $z = 1$

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = -\gamma.$$

• Se $\alpha, \beta, \gamma > 0$, intersecando $\mathcal{Q}$ con i piani paralleli al piano xy otteniamo la curva di livello

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = -\gamma k^2 :$$

tale conica è un'ellisse immaginaria se $k \neq 0$, una coppia ellittica di rette se $k = 0$. La quadrica $\mathcal{Q}$ è detta *cono immaginario*.

Caso dei cilindri ellittici o iperbolici.

In questo caso l'equazione è della forma

$$\beta y^2 + \gamma z^2 = \delta,$$

con $\beta, \gamma, \delta \neq 0$ (in questo parliamo di *cilindro ellittico* o *cilindro iperbolico*).

• Se $\beta, \gamma, \delta > 0$, allora $\mathcal{Q}$ è simmetrica rispetto alla retta di equazioni $y = z = 0$ (cioè all'asse delle ascisse). Intersecando con i piani paralleli al piano yz di equazione $x = k$ otteniamo

$$\beta y^2 + \gamma z^2 = \delta :$$

tale conica è sempre un'ellisse, qualsiasi sia $k \in \mathbb{R}$, e $\mathcal{Q}$ viene detta *cilindro ellittico*, raffigurato in Figura 25.7.

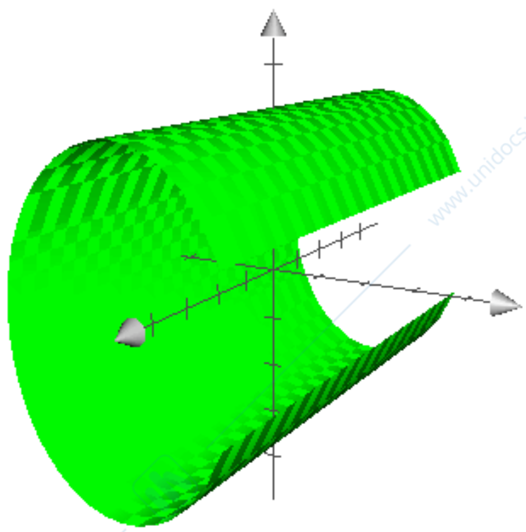

Figura 25.7

In questo caso $\mathcal{Q}$ può essere pensata come l'unione delle rette passanti parallele all'asse delle ascisse che si appoggiano all'ellisse del piano $x = 0$

$$\beta y^2 + \gamma z^2 = \delta.$$

• Se $\beta, \gamma > 0$ e $\delta < 0$, allora intersecando $\mathcal{Q}$ con piani paralleli al piano yz otteniamo la curva di livello

$$\beta y^2 + \gamma z^2 = \delta :$$

tale conica è sempre un'ellisse immaginaria. $\mathcal{Q}$ è un *cilindro ellittico immaginario.*

• Se $\beta, \delta > 0$ e $\gamma < 0$, $\mathcal{Q}$ è ancora simmetrica rispetto alla retta di equazioni $y = z = 0$ e, intersecandola con i piani di equazione $x = k$, otteniamo ancora la curva di livello

$$\beta y^2 + \gamma z^2 = \delta,$$

che, in questo caso, è sempre un'iperbole; $\mathcal{Q}$ viene detta *cilindro iperbolico*, raffigurato in Figura 25.8.

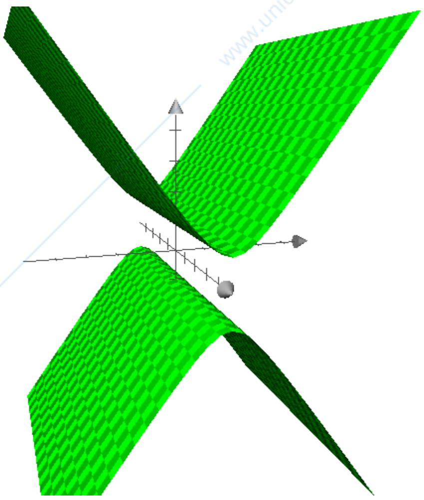

Figura 25.8

In questo caso $\mathcal{Q}$ è l'unione delle rette passanti parallele all'asse delle ascisse che si appoggiano all'iperbole del piano $x = 0$

$$\beta y^2 + \gamma z^2 = \delta.$$

Caso dei cilindri parabolici.

In questo caso l'equazione è della forma

$$\gamma z^2 = 2\delta x,$$

con $\gamma, \delta \neq 0$ (in questo parliamo di *cilindro parabolico*).

• $\mathcal{Q}$ è simmetrica rispetto al piano di equazione $z = 0$ (cioè al piano xy) e intersecando con i piani paralleli al piano xz otteniamo la curva di livello

$$\gamma z^2 = 2\delta x :$$

tale conica è sempre una parabola, qualsiasi sia $k \in \mathbb{R}$, e la quadrica $\mathcal{Q}$ è un *cilindro parabolico*, raffigurato in Figura 25.9.

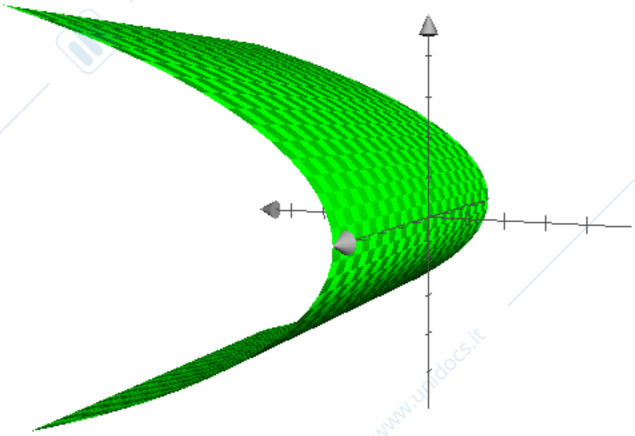

Figura 25.9

Come nei casi precedenti, $\mathcal{Q}$ è l'unione delle rette parallele alla retta $x = z = 0$ (cioè all'asse delle ordinate) che si appoggiano alla parabola del piano $y = 0$

$$\gamma z^2 = 2\delta x.$$

Per concludere la nostra lista, rimangono da analizzare le quadriche di rango al più 2, per le quali però non entreremo nei dettagli, limitandoci ad enunciare il seguente risultato.

Proposizione 25.7. *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica con matrice completa associata B. La quadrica $\mathcal{Q}$ si decompone in un prodotto di due polinomi di grado* 1 *(non necessariamente distinti) se e solo se* $\operatorname{rk}(B) \leqslant 2$.