

**Esercizio 6.** Siano

$$v_1 := (0, 0, 2, -1), \quad v_2 := (-1, 1, 2, 1), \quad v_3 := (0, 1, 0, 2), \quad v_4 := (0, 0, 0, 1).$$

- (1) Verificare che  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  è base di  $\mathbb{R}^4$ .  
 (2) Esiste unico  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$  tale che

$$f(v_1) = f(v_2) = v_1 - v_3, \quad f(v_3) = v_1, f(v_4) = 0.$$

Calcolare  $M(f)$ .

- (3) Trovare basi di  $\ker(f)$  e di  $\text{im}(f)$ .

*Svolgimento.* Per verificare che  $B := (v_1, v_2, v_3, v_4)$  è base di  $\mathbb{R}^4$  è sufficiente dimostrare che i quattro vettori  $v_1, v_2, v_3, v_4$  sono linearmente indipendenti. A tale scopo basta verificare che

$$\varrho \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4,$$

il che è chiaro in quanto la matrice è ridotta per righe.

Risulta che

$$e_1 = -v_1 + v_2 - v_3, \quad e_2 = v_3 - 2v_4, \quad e_3 = v_1/2 + v_4/2, \quad e_4 = v_4,$$

perciò

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(-v_1 + v_2 - v_3) = f(v_3) = v_1 = (0, 0, 2, -1), \\ f(e_2) &= f(v_3 - 2v_4) = f(v_3) = v_1 = (0, 0, 2, -1), \\ f(e_3) &= f(v_1/2 + v_4/2) = f(v_1)/2 + v_4/2 = v_1/2 - v_3/2 = (0, -1/2, 1, -3/2), \\ f(e_4) &= f(v_4) = 0. \end{aligned}$$

sicché

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\begin{aligned} M(f) &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3/2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1} \\ &\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2/4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

risulta  $\varrho(M(f)) = 2$ , quindi  $\dim(\ker(f)) = 2$ . Per determinare una base di  $\ker(f)$  basta allora trovare vettori  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$  linearmente indipendenti e tali che  $f(w) = 0$ . Poiché  $f(v_1) = f(v_2)$  ed  $f(v_4) = 0$  segue che basta scegliere  $w_1 := v_1 - v_2 = (1, -1, 0, -2)$ ,  $w_2 := v_4 = (0, 0, 0, 1)$ . Concludiamo che  $B := ((1, -1, 0, -2), (0, 0, 0, 1))$  è base di  $\ker(f)$ .

Una base di  $\text{im}(f)$  si estrae dall'insieme  $\{(0, 0, 2, -1), (0, 0, 2, -1), (0, -1/2, 1, -3/2), (0, 0, 0, 0)\}$ . Quindi una base di  $\text{im}(f)$  è, per esempio,  $C := ((0, 0, 2, -1), (0, -1/2, 1, -3/2))$ .