Le iperboli degeneri in $\mathcal{F}$ sono tutte e sole quelle per cui $\det(B_c) = 0$: in particolare deve essere $-16c = 0$, sicché l'unica conica degenere in $\mathcal{F}$ è quella corrispondente al valore $c = 0$ cioè quella di equazione

$$(x + 3y - 1)(3x + y - 3) = 0.$$

Affinché una conica di $\mathcal{F}$ passi per l'origine $O(0, 0)$ deve essere $p_c(0, 0) = 0$, cioè $c = -3$: dunque $\mathcal{C}$ ha equazione

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 6x - 10y = 0.$$

Non è richiesto di individuare la rototraslazione che riduce tale conica $\mathcal{C}$ a forma canonica ma solo la forma canonica stessa. Possiamo perciò procedere come segue.

Innanzi tutto calcoliamo gli autovalori della matrice A_{-3}. Il suo polinomio caratteristico è

$$P_{A_{-3}}(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 5 \\ 5 & 3-t \end{vmatrix} = t^2 - 6t - 16 = (t - 8)(t + 2).$$

Quindi una forma canonica di $\mathcal{C}$ è del tipo $8x'^2 - 2y'^2 = \gamma$.

Rimane da individuare γ. A tale scopo si noti che $\det(A_{-3}) = -16$, $\det(B_{-3}) = -48$, sicché $\gamma = -\det(B_{-3})/\det(A_{-3}) = -3$. Pertanto una forma canonica di $\mathcal{C}$ è

$$\frac{2}{3}y'^2 - \frac{8}{3}x'^2 = 1.$$

Esercizio 6. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy sia data la conica $\mathcal{C}_h$ avente matrice

$$B_h = \begin{pmatrix} 3 & h & 0 \\ h & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

(1) Classificare $\mathcal{C}_h$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.
(2) Determinare una forma canonica di $\mathcal{C}_4$.
(3) Determinare $h \in \mathbb{R}$ tale che $\mathcal{C}_h$ sia un'iperbole con angolo fra gli asintoti pari a $2\pi/3$.

Svolgimento. Sia

$$A_h = \begin{pmatrix} 3 & h \\ h & 5 \end{pmatrix}$$

la matrice dei termini di secondo grado della conica $\mathcal{C}_h$. Risulta $\det(A_h) = 15 - h^2$, $\det(B_h) = 3(2h^2 - 31)$. Quindi $\mathcal{C}_h$ è degenere se e solo se $h = \pm\sqrt{31/2}$: per tali valori di h risulta $\det(A_h) < 0$, quindi $\mathcal{C}_h$ è una coppia di rette reali ed incidenti (determinarne le equazioni).

Supponiamo ora $h \neq \pm\sqrt{31/2}$. Se $h = \pm\sqrt{15}$ chiaramente $\mathcal{C}_h$ è una parabola (non degenere). Supponiamo $|h| > \sqrt{15}$: in questo caso $\mathcal{C}_h$ è un'iperbole (non degenere).

Consideriamo ora il caso $|h| < \sqrt{15}$: in questo caso $\mathcal{C}_h$ è un'ellisse (non degenere) e possiamo voler determinare i valori di h per cui è reale e quelli per cui è immaginaria. Si noti che $\mathrm{Tr}(A_h) = 15$, quindi i suoi autovalori sono positivi. Poiché $\det(B_h) < 0$ per $|h| < \sqrt{15}$ segue che una forma canonica di $\mathcal{C}_h$ è del tipo

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

con $\alpha, \beta, \gamma > 0$: concludiamo che $\mathcal{C}_h$ è un'ellisse reale per ogni $|h| < \sqrt{15}$.

Passiamo ora al secondo quesito. Sappiamo già che $\mathcal{C}_4$ è un'iperbole (non degenere). Inoltre il polinomio caratteristico di A_4 è

$$p_{A_4}(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 4 \\ 4 & 5-t \end{vmatrix} = t^2 - 8t - 1 = (t - 4 - \sqrt{17})(t - 4 + \sqrt{17}).$$