LIBRI: MATEMATICA × LE SCIENZE DELLA VITA CASA: AMBROSIANI (BENEDETTO, MAFFI ..)
MATEMATICA × LE SCIENZE CASA: GUERRAGGIO, PEARSON

TOGLIE LEZIONI!

ESAME: 1 PARZIALE ATTORNO AL 9 NOVEMBRE + 15 DICEMBRE

GLI INSIEMI

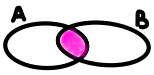
Un insieme è una qualsiasi collezione di oggetti. Gli oggetti che formano un insieme si chiamano elementi dell'insieme. ES: GREGGE DI PECORE

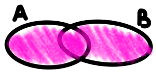
Indicare l'insieme: $A = \{a, b, \dots\}$

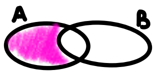
Se A appartiene: $a \in A$

Se A non appartiene: $a \notin A$

Se B é un sottoinsieme: $B \subset A$

Intersezione: $A \cap B$  Diciamo intersezione di due insiemi A e B l'insieme (indicati con A∩B) costituito dagli elementi che appartengono sia ad A sia a B

A unione B: $A \cup B$  Diciamo unione di due insiemi A e B l'insieme (indicato con AUB) costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno degli insiemi A e B

A meno B: $A \setminus B$ 

A complementare B (se l'insieme A é all'interno di una regione S allora l'insieme complementare sarà l'insieme di tutti gli elementi che non appartengono ad A, è un'operazione definita in relazione ad un altro insieme): A^c 

! $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Prodotto cartesiano: SIANO A, B DUE INSIEMI $\Rightarrow A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

Insieme prodotto: $A \times B$ E' DIVERSO DA $B \times A$

Potenza n-esima di un insieme: $A^n = \{(a_1, \dots, a_n), a_i \in A, i = 1, \dots, n\}$

Cardinalitá di un insieme: il numero di elementi che compongono l'insieme.
ES: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ CARDINALITA' DI $A = 6$ OPPURE $|A| = 6$

Cardinalitá del prodotto degli eventi di due insiemi: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$! $|A^n| = |A|^n$

$\mathbb{N}$ Insieme dei numeri naturali: $= \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ Insieme dei numeri interi: $= \{-1, 0, 1, \dots\}$ NUMERI INTERI E I LORO INVERSI

$\mathbb{Q}$ Insieme dei numeri razionali: $= \{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$
↳ × RISOLVERE EQ. LINEARI A COEFF. INTERO $4x = 5$ $x = \frac{5}{4}$

Quadrato lunghezza 1:  $\ell^2 = 2$ Domanda: $\exists\, \ell \in \mathbb{Q} : \ell^2 = 2$?

Assumo che $\ell \in \mathbb{Q}$, ALLORA $\ell = \frac{n}{m}$ CON $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ E n, m PRIMI TRA LORO

$\Rightarrow \ell^2 \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2$ NE SEGUE $2m^2 = n^2$

$\Rightarrow n^2$ È PARI E QUINDI ANCHE n È PARI

$\Rightarrow$ POSSO SCRIVERE $n = 2k$ CON $k \in \mathbb{N}$

CONTRADDIZIONE CHE MI PERMETTE DI AFFERMARE CHE I NUMERI RAZIONALI NON SONO SUFFICIENTI

$n^2 = 4k^2 \Rightarrow 4k^2 = 2m^2$

$2k^2 = m^2$

$\Rightarrow m^2$ È PARI QUINDI m È PARI

Permutazione: contare i modi per ordinare gli elementi di A

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ↳ $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$ IN GENERALE $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots$

↳ NUMERO PERMUTAZIONI DI INSIEME DI n ELEMENTI

Disposizioni: ho n oggetti, ne scelgo m e tenendo conto dell'ordine conto le disposizioni

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $n = 5$, $m = 2$ 1 2 3 4 5 / 1 2 4 3 5 $\frac{n!}{(n-m)!} = \frac{5!}{3!}$

Combinazioni: ho n elementi, contare i sottoinsiemi formati da m elementi in cui l'ordine non conta

$\frac{n!}{(n-m)!\, m!}$ = COEFFICIENTE BINOMIALE

↳ $\binom{n}{m}$

Concentrazione di una soluzione: rapporto tra il volume del soluto e il volume totale della soluzione

↳ $C = \frac{V_{SOLUTO}}{V_{TOTALE}}$ = NO UNITÀ DI MISURA, NUMERO PURO

QUESITO: QUANTI LITRI DI SOLUTO CONTENGONO 20 ℓ DI UNA SOLUZIONE A $C = 0{,}01$?

$V_{SOLUTO} = C \cdot V_{TOTALE} \Rightarrow x = 0{,}01 \cdot 20 \Rightarrow x = 0{,}2$

QUESITO: QUANTI ℓ DI SOLUTO CONTENGONO 30 ℓ DI UNA SOLUZIONE A 2%?

$x = 30 \cdot \frac{2}{100}$ $x = 0{,}6$

QUESITO: HO 10 ℓ DI UNA SOLUZIONE AL 30%. QUANTO SOLVENTE SI DEVE AGGIUNGERE PER RENDERLA AL 20%?

1 RICAVO VOLUME SOLUTO $\Rightarrow \frac{20}{100} \cdot 10 = 3\ell$

2 $\frac{20}{100} = \frac{3}{10+x} \Rightarrow x = 5 \rightarrow$ LITRI DA AGGIUNGERE

$\mathbb{R}$ **Insieme numeri reali**: hanno la seguente rappresentazione $x = n + 0, b_1 b_2 b_3$ n = INTERO, $0 \leq b_i \leq 9$

MA SE LE b_i SONO FINITE O PERIODICHE ALLORA x È RAZIONALE

Proprietà:

- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $(a+b)+c = a+(b+c)$, $a(b \cdot c) = c \cdot (b \cdot a)$
- PROPRIETÀ COMMUTATIVA: $a+b = b+a$, $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$
- PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA: $a \cdot (b+c) = ab + a \cdot c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
- ESISTENZA DEGLI OPPOSTI E DEGLI INVERSI: DATO $a\ \exists!\ (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$, DATO $b\ \exists!\ (b^{-1}) \in \mathbb{R} : b \cdot (b^{-1}) = 1$

SU $\mathbb{R}$ C'È UNA RELAZIONE D'ORDINE, LA INDICHIAMO CON $\leq$

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ SI HA $a \leq b$ OPPURE $b \leq a$
- $a \leq b$ E $b \leq a$ ALLORA $a = b$
- $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- $a, b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$ E $a \cdot b \geq 0$

PRENDIAMO $x, y \in \mathbb{R}$ CON $x < y$

$\Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{Q} : x < q < y$ ⟶ I NUMERI REALI SONO DENSI DI NUMERI RAZIONALI

INTERVALLI LIMITATI

INTERVALLO CHIUSO $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$

INTERVALLO APERTO $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

INTERVALLO CHIUSO A SX E APERTO A DX $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$

INTERVALLO APERTO A DX E CHIUSO A SX $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$

INTERVALLI ILLIMITATI

INTERVALLO CHIUSO ILLIMITATO $[a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$

INTERVALLO APERTO ILLIMITATO $(a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

INTERVALLO CHIUSO ILLIMITATO $[-\infty;b) = \{x \in \mathbb{R} : x \le b\}$

INTERVALLO APERTO ILLIMITATO $(-\infty;b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

PRECISION

$(-\infty;b] \cap [a;+\infty) = [a;b]$

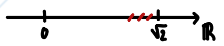
$(-\infty;b) \cap (a;+\infty) = (a;b)$

$[0;+\infty) = \mathbb{R}^+$

$(-\infty;b] = \mathbb{R}^-$

Proprietà fondamentale di $\mathbb{R}$:

$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ $\quad A = \{x \in \mathbb{Q} : x \ge 0,\ x^2 \le 2\}$



A È LIMITATO SUPERIORMENTE

$\forall x \in A,\ x \le \sqrt{2}$ $\exists!\, b^* \in \mathbb{R}$ ESTREMO SUPERIORE DI A

DEFINIZIONE

$A \subseteq \mathbb{R}$ È SUPERIORMENTE LIMITATO SE $\exists\, b \in \mathbb{R} : x \le b,\ \forall x \in A$

$\Rightarrow b$ È DETTO MAGGIORANTE DI A

ESEMPIO

$A = \{\frac{m}{m+1} : m \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$ QUINDI $\frac{m}{m+1} \le 1$ E OGNI $b \ge 1$ È MAGGIORANTE DI A

$A = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}$ ALLORA NON È SUPERIORMENTE LIMITATO

ASSIOMA / TEOREMA

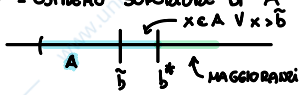
SE $A \subset \mathbb{R}$ È UN INSIEME SUPERIORMENTE LIMITATO ALLORA $\exists!\, b^* \in \mathbb{R}$ TALE CHE

1) b^* È UN MAGGIORANTE DI A

2) $\forall b < b^* \Rightarrow b$ NON È MAGGIORANTE PER A

ESEMPIO

b^* = ESTREMO SUPERIORE DI A



ESEMPIO

$A = \{\frac{m}{m+1} : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ È LIMITATO SUPERIORMENTE

TROVA L'ESTREMO SUPERIORE

$\frac{m}{m+1} \le 1 \Rightarrow 1$ È UN MAGGIORANTE

TESI: 1 È L'ESTREMO SUPERIORE

SUPPONIAMO $x < 1$ ESTREMO SUPERIORE $\Rightarrow a \le x\ \ \forall a \in A$

$\frac{m}{m+1} \le x\ \ \forall x \in \mathbb{N}$

$m \le mx + x \Rightarrow [m(1-x) \le x] \Rightarrow m \le \frac{x}{1-x}$

SE CONSIDERO $m > \frac{x}{1-x}$ HO GIÀ UNA CONTRADDIZIONE QUINDI L'ESTREMO SUPERIORE DI A È 1

DEFINIZIONE

$A \subseteq \mathbb{R}$ È INFERIORMENTE LIMITATO SE $\exists\, a \in \mathbb{R} : a \le b\ \ \forall b \in A$

$\Rightarrow a$ SARÀ DETTO MINORANTE DI A

$\longrightarrow$ L'estremo inferiore di A il più grande minorante di A. La sua esistenza ed unicità è data dall'assioma di completezza dell'insieme R

ASSIOMA

$a^* = \inf A$ $\Rightarrow$ SE $a^* \in A$ ALLORA a^* È DETTO MINIMO DI A

$b^* = \sup B$ SE $b^* \in A$ ALLORA b^* È DETTO MASSIMO DI A

! Se l'insieme non è limitato superiormente
sup A= $+\infty$
Se l'insieme non è limitato inferiormente
inf A= $-\infty$

ESEMPIO

$A = \{(1+\frac{1}{m})^m : m \in \mathbb{N}\}$
$B = \{(1+\frac{1}{m})^{m+1} : m \in \mathbb{N}\}$ LIMITATI INFERIORMENTE

$\cdot\ (1+\frac{1}{m})^m \ge (1+\frac{1}{m-1})^{m-1}$

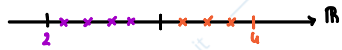
$\cdot\ (1+\frac{1}{m})^{m+1} \le (1+\frac{1}{m-1})^m$

$\longrightarrow (1+\frac{1}{m})^m \le (1+\frac{1}{m})^{m+1}$

FISSATO m

$2 \le \dots \le \dots \le 4$

A,B SONO LIMITATI



SUP A = SUP B = NUMERO DI NEPERO $e \Rightarrow e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

NUMERI COMPLESSI

$p(x) = x^2+1$, $p(x)=0$ => NON RIESCO A RISOLVERLO CON I NUMERI RAZIONALI

INTRODUCO i TALE CHE $i^2 = -1$

$\mathbb{C} : \{a+ib : a, b \in \mathbb{R}\}$ $z = a+ib$

- a È DETTA PARTE REALE DI z
- b È DETTA PARTE IMMAGINARIA DI z
- $\bar{z} = a - ib$ È DETTO CONIUGATO DI z

ARITMETICA COMPLESSA → $z_1 = a+ib$, $z_2 = c+id$

$z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$

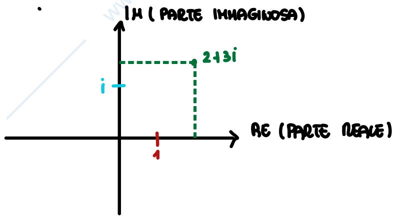
$z_1 \cdot z_2 = (a+ib)\cdot(c+id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = (ac - bd) + i(ad+bc)$

$z \cdot \bar{z} = (a+ib)\cdot(a-ib) = (a \cdot a - b(-b)) + i(\cancel{-ab+ab}) = a^2 + b^2$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(a+ib)\cdot(c-id)}{c^2+d^2}$

PIANO CARTESIANO

Ad ogni punto del piano corrisponde una coppia di numeri reali le cui coordinate sono (x,y)

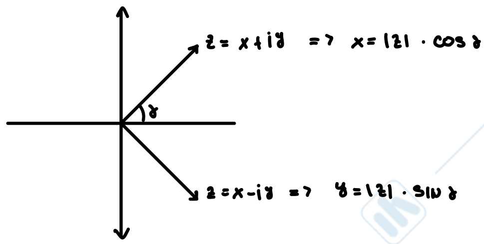


ESEMPIO

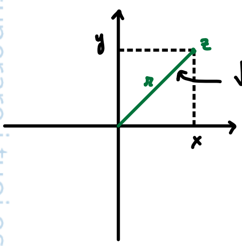
- $z = 1 = 1 + i \cdot 0 \rightarrow (1, 0)$
- $z = i = 0 + i \cdot 1 \rightarrow (0, i)$
- $z = 2+3i \rightarrow (2,3)$ $RE(z) = 2$, $IM(z) = 3$

$z \rightarrow x+iy$

$z \rightarrow r \cdot \cos\gamma + i\, r \sin\gamma$



CALCOLARE LA DISTANZA Z-ORIGINE



$\sqrt{x^2+y^2} = (z \cdot \bar{z})^{1/2}$

! $|z| = r = \sqrt{x^2+y^2} = |a+ib|$

ESERCIZIO NUMERI COMPLESSI → x RISOLVERE GLI ZERI

$z^2 + 2z + 2 = 0$ → DEVO TROVARE GLI ZERI

z_1 e z_2 SONO GLI ZERI => $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$ => $\sqrt{-4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = i \cdot 2$

$z_1 = -1 + i$ $z_2 = -1 - i$

ESERCIZIO → DA NUMERO COMPLESSO A FORMA $a+ib$

$\frac{5-2i}{1+2i}$ → MOLTIPLICO E DIVIDO x IL CONIUGATO DEL DENOMINATORE

$\frac{5-2i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{(5-2i)\cdot(1-2i)}{1+4} = \frac{5-4+i(-10-2)}{5} = \frac{1-i12}{5} = \frac{1}{5} - i\frac{12}{5}$

$\left(\begin{array}{l} z = a+ib \\ \bar{z} = a - ib \end{array} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \right)$

ESERCIZI SUGLI INTERVALLI

$A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 5\}$ => $[-2; 5)$

$B = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{7}{4} < x < 1$ OPPURE $x > 3\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1$ OPPURE $2 \leq x \leq \frac{5}{3}\}$

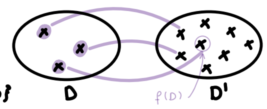
$D = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 0$ OPP. $2 < x < 4\}$ =>
- $D = [-2; 0] \cup (2; 4)$
- D È LIMITATO SUP = 4, INF = -2
- D NON AMMETTE MAX: SUP $D \notin D$ → PERCHÉ 4 NON È INCLUSO
- MIN D = -2 = INF. D

Funzioni: Una funzione é una relazione tra gli elementi di due insiemi

D = DOMINIO $\quad f: D \to D'$

D' = CODOMINIO $\quad f(D) \subseteq D'$

IMMAGINE DI $f = \{ y \in D' : y = f(x), x \in D \}$



ESEMPIO DI FUNZIONI

$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{SE } x > 0 \\ -x & \text{SE } x \le 0 \end{cases}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad$ IMM.$(f) = R_+ \ (x \ge 0)$

ESEMPIO DI FUNZIONI

$f(t) = S_0 + t \cdot V$

- S_0 POSIZIONE INIZIALE CON $t = 0$
- V = VELOCITA' COSTANTE
- t = VARIABILE TEMPORALE

FUNZIONI DA $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

IL LORO GRAFICO

D = DOMINIO → Dominio massimale dove è definita la funzione, in cui ha senso valutare l'espressione della funzione

↳ $f: \frac{1}{x}$ HA SENSO SE $x \neq 0 \Rightarrow D: \{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \} = \mathbb{R} - \{0\}$

REGOLE FUNZIONI

$S(x) = f(x) + g(x)$

$d(x) = f(x) - g(x)$

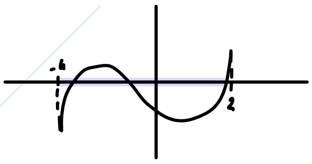
$P(x) = f(x) \cdot g(x)$

$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ DEFINITA IN $g(x)$

ESEMPIO ⇒ DISEGNO GRAFICO DI f

GRAFICO $(f) = \{ (x, y) \in D \times \mathbb{R} : y = f(x) \}$ (→ INSIEME PIANO CARTESIANO)

$GR(f) \subseteq D \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



$D = [-4, -2]$

$f(2) = 1 \quad f(-4) = 1 \quad f(1) = 0$

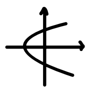
ESERCIZIO

$f(x) = x^2 + 3x - 1$ QUALI PUNTI APP. AL GRAFICO DI f?

$(1, 3)$ O $(-1, 3) \Rightarrow (-1, 3) \notin GR(f)$

$f(1) = 3 \quad f(-1) = -3$

ESERCIZIO ⇒ QUALI RAPP. UN GRAFICO DI UNA f?



NON È UN GRAFI

ESEMPIO FUNZIONE

- LINEARE $f(x) = ax + b$
- QUADRATICA $f(x) = ax^2 + bx + c$
- COSTANTE $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$
- COSTANTI A TRATTI $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x < 1 \\ 2 & x \ge 1 \end{cases}$
- DEFINITE SU $\mathbb{N}$, $D = \mathbb{N}$

  $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ VENGONO DETTE SUCCESSIONI

  $f(k) = f_k$ (ES: $f_k = k^2$)

DOMANDA ⇒ Quali sono le informazioni utili per capire una funzione

- **INIETTIVA** = Se tiro una riga orizzontale il grafico la incontra una sola volta

$f: D \to C$ (D') È INIETTIVA SE $\forall x_1, x_2 \in D$ CON $x_1 \neq x_2$ SI HA $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

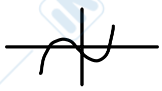
- **SURIETTIVA**

$f: D \to C$ È SURIETTIVA SE $\forall y \in C \ \exists x \in D : y = f(x)$

FUNZIONE SURIETTIVA E INIETTIVA ⇒ $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$

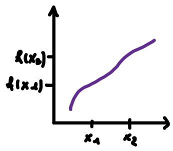
CI PROVO: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Rightarrow x_1 = x_2$ = INIETTI

CI PROVO: $y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y - b}{a} \to f(x) = y$ = SURIETTIVA

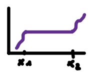


NO INIETTIVA, SI SURIETTIVA

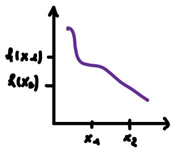
- **MONOTONIA** DI f ⇒ SE x AUMENTA/DIMINUISCE LA f AUMENTA/DIMINUISCE?



$f: D \subseteq R \to R$ È CRESCENTE SE $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ SI HA $f(x_1) \le f(x_2)$



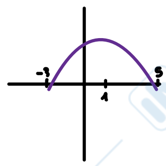
ANCHE SE COSTANTE È CRESCENTE → SE TOLGO L'UGUALE È STRETTAMENTE CRES./DEC



$f: D \subseteq R \to R$ È DECRESCENTE SE $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ SI HA $f(x_1) \ge f(x_2)$

- **VALORI MASSIMI E MINIMI DI f** ⇒ f AMMETTE MAX E MIN?

⇒ DICIAMO CHE $f: D \subseteq R \to R$ HA UN MASSIMO ASSOLUTO IN $x_0 \in D$ SE $\forall x \in D$ SI HA $f(x) \le f(x_0)$ ⇒



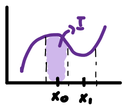
$f(1) \ge f(x) \ \forall x \in [-3;$

$f: [-3; 5] \to R$

1 È IL MASSIMO AS

⇒ INVERSI CON IL MINIMO

- VALORI MASSIMI E MINIMI VERSIONE LOCALE



f HA UN MINIMO LOCALE IN x SE $\exists I \subseteq D$, $x_1 \in I$ TALE CHE $f(x_1) \le f(x)$, $\forall x \in I$

f HA UN MASSIMO LOCALE IN x SE $\exists I \subseteq D$, $x_0 \in I$ TALE CHE $f(x_0) \ge f(x)$, $\forall x \in$

ESEMPIO CON MODELLO DI MALTHUS → ESEMPIO DI FUNZIONE

POPOLAZIONE → N, UNITÀ TEMPORALE DISCRETA $= t$, $t \in \mathbb{N}$

FUNZIONE $= N(t)$

PARTO DA POPOLAZIONE = – TE O –= ⇒ UO UO –P = U =?

ASSUMO CHE NATALITÀ/MORTALITÀ SIANO PROPORZIONALI ALLA POPOLAZIONE STESSA

M = TASSO NATALITÀ, INDIPENDENTE DA t

m = TASSO MORTALITÀ, INDIPENDENTE DA t

$N(1) = N_0 + M \cdot N_0 - m \cdot N_0 = \underbrace{(1+M-m)}_{=R} \cdot N_0$

$N(1) = R \cdot N_0$ ↳ $M - m$ = TASSO CRESCITA

$N(t) = N(t-1) + M N(t-1) - m \cdot N(t-1)$

$= N(t-1) \cdot (1+M-m) = R \cdot N(t-1) = R \cdot (R \cdot N(t-2))$

$\Rightarrow N(t) = R^t \cdot N_0$ = LEGGE DI CRESCITA MALTHUSIANA

R^t
R^k = PROGRESSIONE GEOMETRICA

- $R > 1$ ALLORA R^k AL CRESCERE DI k DIVENTA SEMPRE + GRANDE
- $R < 1$ ALLORA R^k AL CRESCERE DI k DIVENTA SEMPRE + PICCOLO
- R^k, $R > 1$ CRESCENTE
- R^k, $R < 1$ DECRESCENTE
- R^k, $R = 1$ COSTANTE

ESEMPIO

Assumiamo un tasso di crescita costante del 25%negli anni pari e del 4% negli anni dispari
Domanda: calcolo la popolazione dopo 6 anni

N_0 È DATO, TROVARE $N(6)$

$N(1) = N_0 \left(1 + \frac{4}{100}\right) \Rightarrow N(2) = N(1) \cdot \left(1 + \frac{25}{100}\right)$

$= N_0 \left(1 + \frac{4}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{25}{100}\right)$

$\Rightarrow N(6) = N_0 \left(1 + \frac{4}{100}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{25}{100}\right)^3$

FUNZIONI COMPOSTE

$g \circ f : A \to C$
$x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$

$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x))$

$A \longrightarrow B \longrightarrow C$

La funzione composta $g \circ f$ ha senso se l'immagine di f è contenuta nel dominio di g

ESEMPIO

$g(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = x - 1$

$h = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x-1) = \frac{1}{x-1}$

$g(x) = \frac{1}{x}$ È BEN DEFINITA PER $x \neq 0$ SU $\mathbb{R} - \{0\}$

DOMINIO $h = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$

- $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x - 3$

$h = g \circ f(x) = \sqrt{x-3}$

LA FUNZIONE $\sqrt{x}$ HA DOMINIO $\mathbb{R}_+$

DOMINIO $h = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in$ DOMINIO DI $\sqrt{x}\} = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$

Rette e funzioni lineari

EQUAZIONE: $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ CON $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

- SE $\beta = 0 \Rightarrow \alpha x + \gamma = 0$
  $\Rightarrow \{x = -\frac{\gamma}{\alpha}\} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ RETTA VERTICALE
- SE $\beta \neq 0 \Rightarrow y = ax + b$ La retta si può rappresentare come il grafico di una funzione lineare → $f(x) = ax + b$
  $\Rightarrow \{(x,y) : y = ax + b\} = \{(x,y) : y = f(x)\}$

Interpretazione dei coefficienti

- DATO $f(x) = ax + b$ È $b = f(0)$, $(0,b)$ È GRAFICO DI f ⟶ b si chiama intercetta e coincide con la coordinata y del punto di intersezione del grafico di f con l'asse delle y
- a RAPPRESENTA IL COEFFICIENTE ANGOLARE
  ↳ DATI DUE PUNTI (x_0, y_0) E (x_1, y_1)
  $y_0 = a x_0 + b$ ↳ $y_1 = a x_1 + b$
  $\Rightarrow y_1 - y_0 = a(x_1 - x_0) \Rightarrow a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ È DETTO COEFF. ANGOLARE
  - $a < 0$ RETTA DECRESCENTE
  - $a > 0$ RETTA CRESCENTE
  - $a = 0$ RETTA ORIZZONTALE

* SE DUE RETTE HANNO LO STESSO COEFF. ANGOLARE SONO PARALLELE

RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI

DATI 2 PUNTI (x_1, y_1), (x_2, y_2) ⟶ $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$

$\Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \cdot (x - x_1) + y_1$

FASCIO DI RETTE PASSANTE PER UN PUNTO ⟶ $y = a(x - x_0) + y_0$

ESEMPIO

UNA CISTERNA SI RIEMPIE 100 ℓ ALL'ORA, QUANDO $t = 0$ CI SONO 50 ℓ

$\Rightarrow$ SCRIVERE IN FUNZIONE DI t LA QUANTITÀ DI ACQUA NELLA CISTERNA

$y(t)$ = QUANTITÀ DI ACQUA NELLA CISTERNA AL TEMPO t

↳ $y(t) = at + b$ ⟶ $y(t) = 100t + 50$

- $y(0) = 50 = b$
- $y(t+1) - y(t) = 100$

$a(t+1) - at = a$

Funzioni quadratiche

$f(x) = ax^2 + bx + c$

SE $a>0$ => VERTICE VERSO L'ALTO

SE $a<0$ => VERTICE VERSO IL BASSO

INTERSEZIONE DEGLI ASSI

$f(x)=0 \Rightarrow ax^2+bx+c=0$

↳ $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ = DISCRIMINANTE Δ

- SE $\Delta > 0$ HO DUE SOLUZIONI
- SE $\Delta = 0$ HO UNA SOLUZIONE (VERTICE)
- SE $\Delta < 0$ NON HO SOLUZIONI

X DEL VERTICE: $\frac{-b}{2a}$

Potenze e radici

- $f(x) = x^m$, $m \in R$ È BEN DEFINITA $\forall x \in R$
  ↳ DOMINIO DI $f = R$
- $f(x) = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ È BEN DEFINITA PER OGNI $x \neq 0$
  ↳ DOMINIO DI $f = R - \{0\}$
- $f(x) = x^{1/m} = \sqrt[m]{x}$ È BEN DEFINITA PER $x \geq 0$
  ↳ DOMINIO DI $f = [0; +\infty)$

REGOLE

- $x^0 = 1$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
- $x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$
- $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$
- $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

GRAFICI

SE $\beta > 0$ ALLORA x^β È CRESCENTE => COME VARIA x^β RISPETTO A $\beta \geq 0$

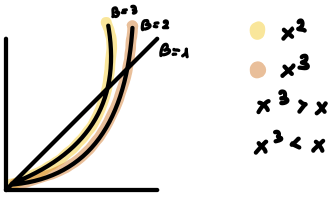
=> SE $x < y \Rightarrow x^\beta < y^\beta$ = MONOTONIA

- SE $x>0$ e $\beta>0 \Rightarrow x^\beta > 1 \Leftrightarrow x > 1$ UN CASO PARTICOLARE DELLA MONOTONIA
  ↳ $x>1 \Rightarrow x^\beta \geq 1^\beta = 1$

IN GENERALE

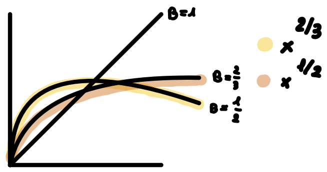
$$\begin{cases} \boxed{x^{\beta_2} \geq x^{\beta_1}}^{*} & \text{SE } x \geq 1 \\ x^{\beta_2} \leq x^{\beta_1} & \text{SE } x < 1 \end{cases}$$

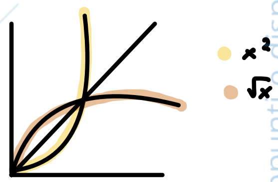
* UGUALE A DIRE $x^{\beta_2 - \beta_1} \geq 1$



$x^3 > x^2 > x$ SE $x \geq 1$

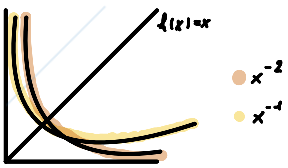
$x^3 < x^2 < x$ SE $x <$





SE $\beta < 0$ ALLORA x^β È DECRESCENTE

$$\begin{cases} \frac{1}{x} > \frac{1}{x^2} & \text{SE } x \geq 1 \\ \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2} & \text{SE } x < 1 \end{cases}$$



MODELLI BASATI SU LEGGI DI POTENZA

1) DATO $f(x) = \alpha \cdot x^\beta$

$$\left.\begin{array}{l} y = \text{PESO ORGANISMO} \\ x = \text{PESO SCHELETRO} \end{array}\right\} y = x^\beta \cdot \alpha \quad \text{CON } \beta = \frac{2}{3}$$

2) I = INDICE MASSA CORPOREA

$$\left.\begin{array}{l} P = \text{PESO} \\ h = \text{ALTEZZA} \end{array}\right\} I = \frac{P}{h^2} \Rightarrow h = \frac{1}{2R} \cdot \sqrt{P}$$

3) LEGGE DI ZIPF ES: BASI DNA

$A = \{A, C, G, T\}$ -> SCRIVERE PAROLE CON 6 LETTERE

FREQUENZA DELLA K-ESIMA PAROLA È DETTA $f_k = \frac{a}{k^\alpha}$

a = COSTANTE COEFF. α DEL DNA = 0,38

$P(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$

$a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, \ldots, m \quad , m \in \mathbb{N}$

ESEMPIO

$\sqrt{2} \cdot x^3 + 2 \cdot x + 1$

$P(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \ldots$

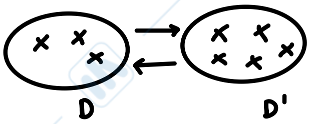
CON $i = 0, 1, 2, \ldots, m$

ESERCIZIO

$f(x) = \sqrt{x}\ , \quad g(x) = \frac{x}{1-x^2}$

DISCUTO IL DOMINIO DI $g+f$ E $g \cdot f$

INVERSO DI UNA FUNZIONE =>



Ad ogni elemento di D f associa un solo elemento di D'

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

VOGLIO TROVARE $f^{-1} : D' \to D$

$(y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x)$

1. OSTRUZIONE

$\Rightarrow$ SE $\exists\, x_1, x_2 \in D : f(x) = y = f(x_2)$ CON $x_1 \neq x_2$

ALLORA NON SAPPIAMO DEFINIRE $f^{-1}(y)$

! RICORDIAMO: $f : D \to D'$ È DETTA INIETTIVA SE $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$

↳ RIFORMULATO: SE $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow$ NE SEGUE IL PROBLEMA: DATO $y \in D$ TROVARE $x \in D : f(x) = y$

[AMMETTE UNA SOLUZIONE SE $y \in \mathrm{Im}(f)$ ED È UNICA SE f È INIETTIVA]

DATA $f : D \to D'$ INIETTIVA, CHIAMIAMO L'INVERSA DI f LA FUNZIONE f^{-1}

$f^{-1} : \mathrm{Im}(f) = f(D) \subseteq D' \to D$

$y \longmapsto f^{-1}(y)$

t.c. $\cdot\ f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in \mathrm{Im}(f)$

$\cdot\ f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in D$

- D_f INDICA IL DOMINIO DI f
- $D_{f^{-1}}$ INDICA IL DOMINIO DI f^{-1}

$\Rightarrow$ 1) $D_{f^{-1}} = \mathrm{Im}(f)\ , \quad \mathrm{Im}(f^{-1}) = D_f$

2) $\forall x \in D_f \quad f^{-1}(f(x)) = x\ , \quad \forall y \in \mathrm{Im}(f) \quad f(f^{-1}(y)) = y$

3) $\forall x \in D_f\ , \forall y \in D_{f^{-1}}$ SI HA $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

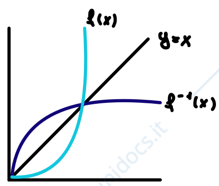
$\Rightarrow$ IN TERMINI DEL GRAFICO

$gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$

$= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = f^{-1}(y)\}$

$= S(\{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = f^{-1}(y)\})$

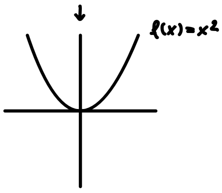
$S((x, y)) = \{(y, x)\}$



ESEMPIO $f(x) = x^2$

DISCUTERE L'INIETTIVITÀ DI f

$f(2) = 4 = f(-2) \to$ NON È INIETTIVA MA POSSO STRINGERE IL DOMINIO



↳ $f : [0, +\infty) \to [0; +\infty)$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$D_{f^{-1}} = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(x^2) = [0; +\infty]$

$\sqrt{x} : [0, \infty) \to [0; +\infty)$

$\forall y \in D_{f^{-1}}\ , f^{-1}(y)$ È LA SOLUZIONE APPARTENENTE AL DOMINIO DI f DELL'EQUAZIONE $y = x^2 \mapsto \forall x \geq 0 \quad \sqrt{x^2} = x$

OSSERVAZIONE

$x \geq 0 \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{f^{-1}} \sqrt{x^2} = x$

$x \leq 0 \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{f^{-1}} -\sqrt{x^2} = -x$

$$\left.\begin{array}{l} m \text{ PARI} \to x^m \to \text{NON INIETTIVA} \\ m \text{ DISPARI} \to x^m \to \text{È INIETTIVA} \end{array}\right\} f^{-1}(x) \text{ È L'UNICA SOLUZIONE DI } x^m = y$$

TRASFORMAZIONI

SOMMA

DATO c È UNA FUNZIONE COME VARIA $f+c$?

SE $c>0$ → IL GRAFICO TRASLA VERTICALMENTE VERSO L'ALTO

SE $c<0$ → IL GRAFICO TRASLA VERTICALMENTE VERSO IL BASSO

E SE HO $f(x+c)$?

SE $c<0$ → IL GRAFICO TRASLA A DX

SE $c>0$ → IL GRAFICO TRASLA A SX

MOLTIPLICAZIONE

DATO $c \cdot f(x)$

SE $c<1$ AVRÒ UNA CONTRAZIONE SULL'ASSE DELLE y

SE $c>1$ AVRÒ UNA DILATAZIONE SULL'ASSE DELLE y

SE $c<0$ AVRÒ UN'INVERSIONE SULL'ASSE DELLE x

DATO $f(x \cdot c)$

SE $c>1$ AVRÒ UNA CONTRAZIONE SULL'ASSE DELLE x

SE $c<1$ AVRÒ UNA DILATAZIONE SULL'ASSE DELLE x

SE $c=-1$ AVRÒ UN'INVERSIONE SULL'ASSE DELLE y

MODULO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$$

↳ RISULTA UNA FUNZIONE PARI

SE $|f(x)|$ LA FUNZIONE INVERTE LA PARTE NEGATIVA SULL'ASSE x

↳ $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x)>0 \\ -f(x) & \text{se } f(x)<0 \end{cases}$

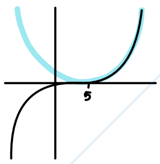
SE $f(|x|)$ LA FUNZIONE SI INVERTE SULL'ASSE x

· DISEGNO x^3, TRASLO, MODULO

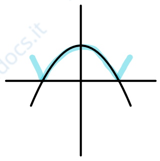
↑

→ ES: $f(x) = |(x-5)^3|$

$$f(x) = \begin{cases} (x-5)^3 & \text{se } f(x)>0 \\ -(x-5)^3 & \text{se } f(x)<0 \end{cases}$$



→ ES: $f(x) = |-x^2+5|$

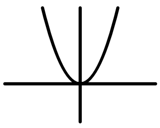


FUNZIONI CHE NON CAMBIANO

· SE $f:(-a;a) \to \mathbb{R}$ TALE CHE $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in (-a;a)$ = FUNZIONE PARI ⇒ SE $f(x)$ È CRESCENTE IN $x>0$ ALLORA SARÀ DECRESCENTE PER $x<0$ O VICEVERSA

↳ ES: $f(x) = x^2$

↳ NON PUÒ MAI ESSERE STRETTAMENTE CRESCENTE/DECRESCENTE, INIETTIVA (INVERTIBILE) A MENO CHE NON SIA COSTANTE

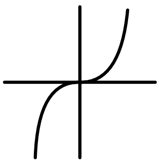


→ SIMMETRICO ASSE y $(x=0)$

· SE $f:(-a;a) \to \mathbb{R}$ TALE CHE $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in (-a;a)$ = FUNZIONE DISPARI

↳ ES: x^3

↳ $f(-0) = f(0)$



→ SIMMETRICO ASSE x $(y=0)$

Funzioni esponenziali

$f: \mathbb{R} \to (0;+\infty)$! SEMPRE

$x \longrightarrow a^x$, $a>1$

· $a^x>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

· $a^0 = 1$, $a^1 = 1$

· FUNZIONE STRETTAMENTE CRESCENTE: SE $x_1<x_2 \Rightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$

$x \longrightarrow a^x$, $0<a<1$

$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$

↳ $\frac{1}{a}>1$

· $a^x>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

· $a^0 = 0$, $a^1 = a$

· STRETTAMENTE CRESCENTE: SE $x_1<x_2 \Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$

↳ PROPRIETÀ

$a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

→ RICORDA $x^a \neq a^x$

POTENZA ↲ ↳ ESPONENZIALE

ESEMPIO ⇒ TASSO CRESCITA CAPITALE 1% ANNO

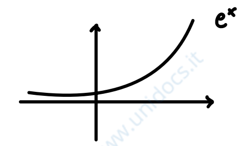
? DESCRIVERE IL CAPITALE DOPO K ANNI

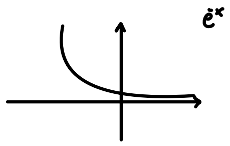
$C(0) = 1000$

$C(1) = \left(1 + \frac{1}{1000}\right) \cdot 1000$

$C(k) = C \cdot (k-1) \cdot \left(1 + \frac{1}{1000}\right) = 1000 \cdot \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^k = b \cdot a^k$ CON $b = 1000$, $a = 1+1\%$

$f(x) = e^x$ CON e = NUMERO NEPERO = BASE NATURALE





ESEMPIO

N: CARDINALITÀ DI UNA POPOLAZIONE

INFORMAZIONE SPERIMENTALE: IL TEMPO RADDOPPIA OGNI 4 h

VOGLIO SAPERE: $N(t)$

$\Rightarrow N(0) = N_0 \; (=100)$

$\Rightarrow N(4) = 2 \cdot N(0)$

$\vdots$

$N(4k) = 2^k \cdot N(0)$ $\Big\}$ $N(t) = 2^{t/4} \cdot N(0)$ IN GENERALE $N(t) = 2^{t/\Delta} \cdot N(0)$ IN CUI Δ = TEMPO RADDOPPIO

$\downarrow$

$4k = k = t/4$

VOGLIO SAPERE IN QUANTO TEMPO UNA POPOLAZIONE HA 1000 MEMBRI SAPENDO CHE RADDOPPIA OGNI 4 h

$\Rightarrow 2^{t/4} \cdot (N_0) = 1000$

$2^{t/4} \cdot 100 = 1000$

$2^{t/4} = 100 \rightarrow$ X RISOLVERLA TROVO LA FUNZIONE INVERSA $\rightarrow$ È INIE

$\log_2(2^{t/4}) = \log_2(100)$ $= \log_2(10^2)$, $\log_2 2 = 1$

$t/4 \cdot \log_2 2 = 2 \log_2(10)$

$t = 8 \cdot \log_2(10)$

Logaritmi

$f(x) = a^x$ CON $a > 0$

DOMINIO DI $f = \mathbb{R}$

IMMAGINE DI $f = (0; +\infty)$

$\Big\}$ $\log a : (0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \log_a(x)$

REGOLE

$\log_a(a^x) = x, \; \forall x \in \mathbb{R}$

$a^{\log_a x} = x, \; \forall x > 0$

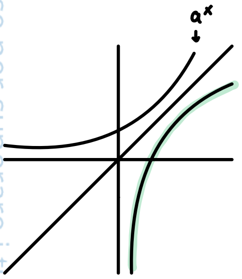
$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$

$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log(x_1) - \log(x_2)$

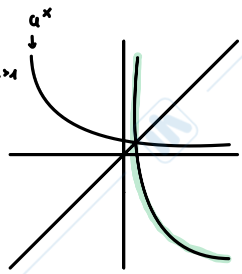
$\log_a(x^b) = b \cdot \log_a x \quad \forall b \in \mathbb{R}$

$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad \forall x, a, b > 0$

! $\mathrm{Log} = \log_{10}$



$\log_a x$ con $a > 1$



$\log_a x$ con $0 < a < 1$

SCALA Log-Log $\rightarrow$ Trasforma le funzioni di tipo potenza in funzioni lineari

DATA $y = f(x)$ $\Rightarrow$ CAMBIO VARIABILE $w = \mathrm{Log}\, x$

$z = \mathrm{Log}\, y$

$f(x) = y = a \cdot x^b$

$z = \mathrm{Log}\, y = \mathrm{Log}(a \cdot x^b)$

$= \mathrm{Log}\, a + \mathrm{Log}\, x^b$

$= \mathrm{Log}\, a + b \cdot \mathrm{Log}\, x$ $\longrightarrow$ LA SCRIVO COME FUNZIONE DI w

$= \mathrm{Log}\, a + b \cdot w$

ESEMPIO

$y = 4 \cdot x^{-1/2}$ $\quad w = \mathrm{Log}\, x$

$z = \mathrm{Log}\, y$

$z = \mathrm{Log}\, y = \mathrm{Log}\, 4 + \mathrm{Log}(x^{-1/2})$

$= \mathrm{Log}\, 4 - \frac{1}{2} \mathrm{Log}\, x$

$= \mathrm{Log}\, 4 - \frac{1}{2} w$

$z = \mathrm{Log}\, 4 - \frac{1}{2} w$

SCALA Semi-Log $\rightarrow$ Trasforma leggi esponenziali in leggi in leggi lineari

DATA $y = f(x)$ $\Rightarrow$ CAMBIO VARIABILI $w = x$

$z = \mathrm{Log}\, y$

$f(x) = y = b \cdot a^x$

$z = \mathrm{Log}\, y = \mathrm{Log}\, f(x) = \mathrm{Log}(b \cdot a^x)$

$= \mathrm{Log}\, b + \mathrm{Log}\, a^x$

$= \mathrm{Log}\, b + x \,\mathrm{Log}\, a$

$= \mathrm{Log}\, b + w \cdot \mathrm{Log}\, a$ = LEGGE LINEARE

ESEMPIO

$y = 4 \cdot 3^{3/2 x}$ $\quad z = \mathrm{Log}\, y$

$w = x$

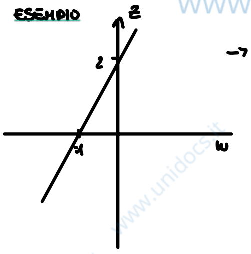
$z = \mathrm{Log}\, y = \mathrm{Log}\, 4 + \mathrm{Log}\, 3^{3/2 x}$

$= \mathrm{Log}\, 4 + \frac{3}{2} x \cdot \mathrm{Log}\, 3$

$z = \mathrm{Log}\, 4 + \frac{3}{2} w \cdot \mathrm{Log}\, 3$

$z = 2w + 2$

ESEMPIO



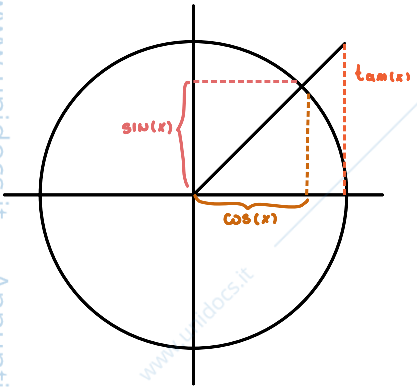
→ SCALA SEMI-LOG

? TROVO LA FUNZIONE CHE MI DA QUESTO GRAFICO

1. SCRIVO EQUAZIONE RETTA $z = 2w + 2$
2. FACCIO INVERSO $w = x$ ↳ $\log y = 2x + 2$

$z = \log y$ HA BASE 10 QUINDI ELEVO TUTTO $y = 10^{2x+2}$

Funzioni trigonometriche



⇒ CIRCONFERENZA DI RAGGIO 1

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ⇒ TEOREMA DI PITAGORA

$\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$

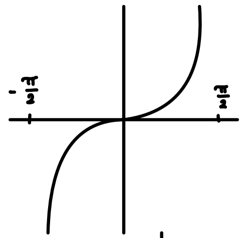
$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

↳ DOMINIO $(\tan(x)) = \{x \in R : \cos x \neq 0\}$

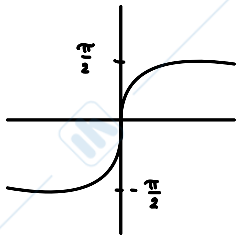
↳ CON $x = 0$ HO UNA SOLUZIONE PER $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

$\tan : (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \longrightarrow R$



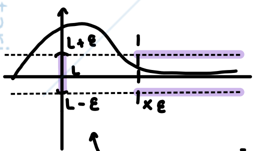
⇒ FUNZIONE INIETTIVA = INVERTIBILE

IL SUO INVERSO SI CHIAMA $\arctan : R \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$



Limiti

⇒ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$



Se quando la variabile x cresce arbitrariamente, i corrispondenti valori di f(x) sono sempre più vicini al valore di L

⇒ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; x_\varepsilon > 0$ TALE CHE $|f(x) - L| < \varepsilon, \forall x \geq x_\varepsilon$

$(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ È L'INTERVALLO APERTO $= \{x \in R : L - \varepsilon < x < L + \varepsilon\}$

X ANALOGIA

⇒ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists x_\varepsilon < 0$ TALE CHE $|f(x) - L| < \varepsilon \;\; \forall x < x_\varepsilon$

OSSERVAZIONE

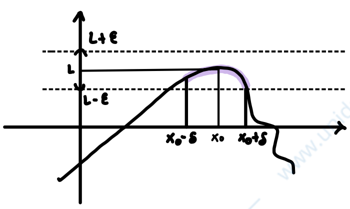
La funzione f potrebbe non essere definita in x0

Il valore che la funzione eventualmente assumerebbe in x0, non interviene nella definizione

ε ~ TOLLERANZA (DATA)

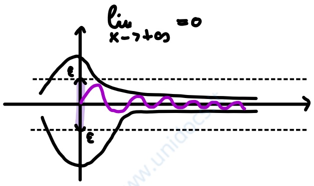
δ ~ MISURA DI VICINANZA

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ CON $x_0 \in R, L \in R$



Quando la variabile x assume valori vicini ad x0 (diversi da x0), i corrispondenti valori di f(x) sono vicini a L

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta_\varepsilon > 0$ TALE CHE $|f(x) - L| < \varepsilon, \; \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \; x \neq x_0$



$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon > 0 : |f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \geq x_\varepsilon$

$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin x$

$f: (0; +\infty) \to \mathbb{R}$

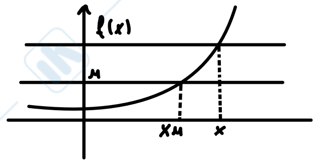
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

LIMITE INFINITO

DEFINIZIONE

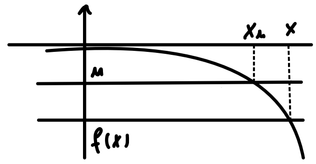
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ Quando la variabile x cresce arbitrariamente i corrispondenti valori di f(x) sono sempre più grandi

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ SE $\forall M > 0\ \exists x_M > 0$ TALE CHE $f(x) > M \quad \forall x > x_M$



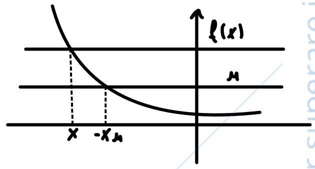
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ Quando la variabile x cresce arbitrariamente i corrispondenti valori di f(x) sono sempre più piccoli

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ SE $\forall M < 0\ \exists x_M > 0$ TALE CHE $f(x) < M \quad \forall x > x_M$



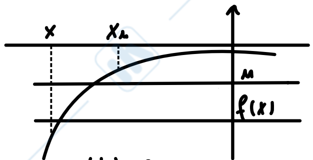
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ Quando la variabile x diminuisce arbitrariamente i corrispondenti valori di f(x) sono sempre più grandi

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ SE $\forall M > 0\ \exists x_M < 0$ TALE CHE $f(x) > M \quad \forall x < -x_M$



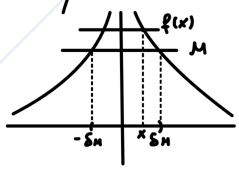
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ Quando la variabile x diminuisce arbitrariamente i corrispondenti valori di f(x) sono sempre più piccoli

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ SE $\forall M < 0\ \exists x_M < 0$ TALE CHE $f(x) < M \quad \forall x < -x_M$



$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ Quando la variabile x assume valori vicini ad x0 (diversi da x0), i corrispondenti valori di f(x) sono arbitrariamente grandi

$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ SE $\forall M > 0\ \exists \delta_M > 0$ TALE CHE $f(x) > M \quad \forall x \in (x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M)$ CON $x \neq x_0$



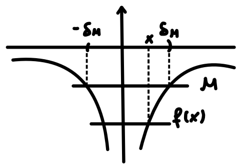
$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x^2} = \infty$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ Quando la variabile x assume valori vicini ad x0 (diversi da x0), i corrispondenti valori di f(x) sono arbitrariamente piccoli

$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ SE $\forall M < 0\ \exists \delta_M < 0$ TALE CHE $f(x) < M \quad \forall x \in (x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M)$ CON $x \neq x_0$



LIMITE DX E SX

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \Rightarrow$ LIMITE DESTRO

DEFINIZIONE: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ TALE CHE $|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$ CON $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$

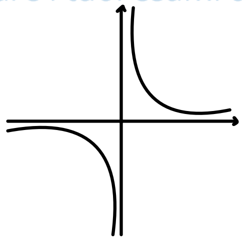
$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \Rightarrow$ LIMITE SINISTRO

DEFINIZIONE: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ TALE CHE $|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$

- SE ESISTE $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ ALLORA $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

FUNZIONI DOVE IL LIMITE NON ESISTE

- SE $\lim_{x\to x_0^+} \neq \lim_{x\to x_0^-}$ ALLORA $\lim_{x\to x_0} f(x)$ NON ESISTE $\quad f(x)=\frac{1}{x} \quad f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$

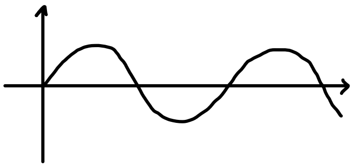


$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\rightsquigarrow \lim_{x\to 0}$ NON ESISTE

-

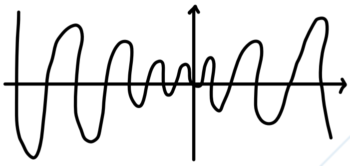
- SE LA FUNZIONE È PERIODICA $\quad f(x)=\sin x \quad f:\mathbb{R}\to[-1,1]$



$\lim_{x\to\infty} \sin(x) = L$ MA $\nexists L \in [-1,1]$

$\rightsquigarrow \nexists \lim_{x\to+\infty} \sin(x)$

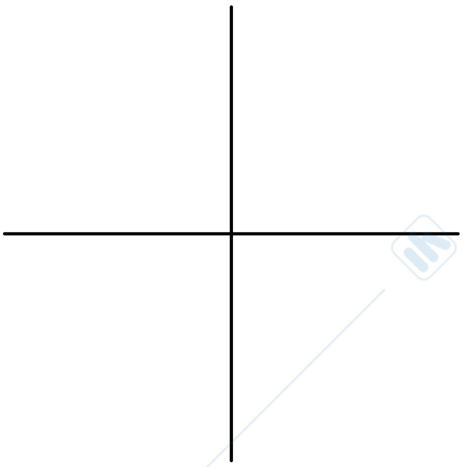
SE LA FUNZIONE OSCILLA $\quad f(x)=\sin(1/x) \quad f:\mathbb{R}-\{0\}\to[-1;1]$



$\rightsquigarrow \nexists \lim_{x\to 0^\pm} \sin(1/x)$

ESERCIZIO IMPORTANTE

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-5 \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \quad \lim_{x\to-2^+} f(x)=-2 \quad \lim_{x\to-2^-} f(x)=+\infty \quad \lim_{x\to 0} f(x)=0 \quad f(-2)=0$



$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{64}$

$i \quad 8$

CALCOLO LIMITI

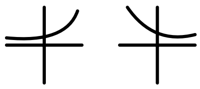
POTENZE = $f(x)=x^n$ CON $n\in\mathbb{N}$

$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \forall x\in\mathbb{N}$

$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ PARI} \\ -\infty & n \text{ DISPARI} \end{cases}$

ESPONENZIALI = $f(x)=a^x$ CON $a>0$

$a>1 \qquad a<0<1$

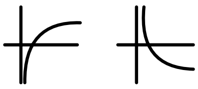


$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 0 & 0<a<1 \end{cases}$

$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a>1 \\ +\infty & 0<a<1 \end{cases}$

LOGARITMI = $f(x)=\log_a(x) \quad f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$a>1 \qquad 0<a<1$



$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty & 0<a<1 \\ 0 & a>1 \end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ -\infty & 0<a<1 \end{cases}$

OPERAZIONI LIMITE

SE $\lim_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=\beta$

- $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \alpha+\beta$
- $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \alpha+\beta$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ SE $\beta\neq 0$

VALIDO ANCHE PER $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ CON $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

- $\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x)=+\infty$ SIGNIFICA CHE $+\infty+c=+\infty$ / $-\infty+c=-\infty$
  $\forall f : \lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\forall g : \lim_{x\to x_0} g(x)=c \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x)+f(x)=\infty$

- $+\infty\cdot+\infty=+\infty$ / $-\infty\cdot-\infty=+\infty$ / $+\infty\cdot-\infty=-\infty$
- $+\infty+\infty=+\infty$ / $-\infty-\infty=-\infty$
- SE $c\neq 0$ ALLORA $c\cdot+\infty=+\infty$ SE $c>0$ / $c\cdot-\infty=-\infty$ SE $c<0$
- $\frac{c}{\pm\infty}=0 \quad \forall c\in\mathbb{R}$

RIASSUMENDO

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
  $\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

- SOMMA $\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = \lambda+\beta$ (TRANNE NEL CASO $\pm\infty$ DI λ e β)
- PRODOTTO $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lambda\cdot\beta$ (TRANNE NEL CASO $\pm\infty\cdot 0$)
- QUOZIENTE $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda}{\beta}$ (TRANNE NEI CASI $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

ESEMPIO

* $\lim_{x\to+\infty} -2(3+\frac{1}{x}) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} -2\cdot 3 = -6$

$h(x) = -2(3+\frac{1}{x})$

$f(x) = -2$

$g(x) = 3+\frac{1}{x} \to \lim_{x\to+\infty} 3+\frac{1}{x} \Rightarrow 3+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 3+0 = 3$

* $\lim_{x\to+\infty} (2-e^{-x}) = 2-0 = 2$

$h(x) = -e^{x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} -e^{x} = 0$

* $\lim_{x\to+\infty} \frac{2-e^{-x}}{3+\frac{1}{x}} = \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}$

* $\lim_{x\to+\infty} \overbrace{(-1+\frac{1}{x})}^{-1} - \overbrace{e^{x}}^{\infty} = +\infty$

* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{e^{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$

FORME DI INDECISIONE

* $+\infty-\infty$ * $0\cdot(\pm\infty)$ * $\frac{0}{0}$ * $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$\Rightarrow$ Per il limite ad infinito conta il termine di grado massimo

* $\lim_{x\to+\infty} 2x^3-x+1 = +\infty-\infty+1 = F.I$

$\lim_{x\to+\infty} 2x^3-x+1 = 2x^3(1-\frac{x}{2x^3}+\frac{1}{2x^3}) = 2x^3(1-\underbrace{\frac{1}{2x^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{2x^3}}_{\to 0}) = +\infty\cdot(1-0+0) = +\infty$

* $\lim_{x\to-\infty} -x^4+x^3-x^2 = -\infty+\infty-\infty = F.I$

$\lim_{x\to+\infty} -x^4+x^3-x^2 = x^4(-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}) = +\infty\cdot(-1+0-0) = -\infty$

* $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{M(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_m\cdot x^m}{b_m\cdot x^m}$

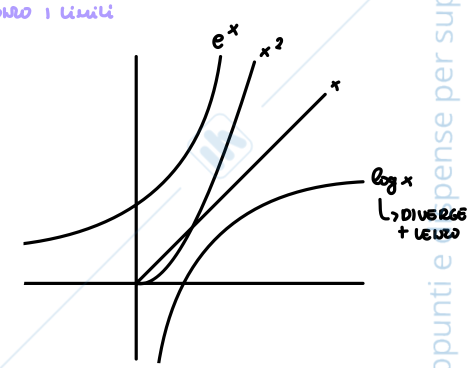
* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}-x^5-3}{2e^{3x}-e^{2x}+4} = \frac{+\infty-\infty-3}{+\infty-\infty+4}$

$\lim_{x\to+\infty} e^{3x}-x^5+3 = e^{3x}(1-\frac{x^5}{e^{3x}}+\frac{3}{e^{3x}}) =$

$\lim_{x\to+\infty} 2e^{3x}-e^{2x}+4 = 2e^{3x}(1-\frac{e^{2x}}{2e^{3x}}+\frac{4}{2e^{2x}})$

$= \frac{e^{3x}(1-\frac{x^5}{e^{3x}}+\frac{3}{e^{3x}})}{2e^{3x}(1-\frac{e^{2x}}{2e^{3x}}+\frac{4}{2e^{2x}})} = \frac{1\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ CONFRONTO I LIMITI



POTENZE: $0<\beta_1<\beta_2$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\beta_1}{\beta_2} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\beta_2}{\beta_1} = +\infty$

ESPONENZIALI: $0<\beta_1<\beta_2$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta_1 x}}{e^{\beta_2 x}} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta_2 x}}{e^{\beta_1 x}} = +\infty$

POTENZE - ESPONENZIALE $\beta>0$, $\lambda>0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\beta}}{e^{\lambda x}} = 0$

ESEMPIO

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^{\beta}} = +\infty$

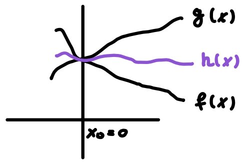
POTENZA - LOGARITMO $\lambda>0, \beta>0, a>0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a(x))^{\lambda}}{x^{\beta}} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\beta}}{(\log_a x)^{\lambda}} = +\infty$

TEOREMA DEL CONFRONTO → DEI 2 CARABINIERI

TEOREMA: SONO DATE 3 FUNZIONI: $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ DEFINITE IN UN INTORNO I DI $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE:

- $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = L = \lim_{x \to x_0} g(x)$



SEGUE ALLORA $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$

↳ A COSA SERVE: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$ $\Rightarrow \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} = f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

$\downarrow 1 \quad \downarrow ? \quad \downarrow 1$ (PER $x \to 0$)

↳ SEGUE CHE $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$ E X IL TEOREMA $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

↓

ESEMPIO $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$

$-\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{1}{x} \to 0$ (PER $x \to 0$)

→ SEGUE CHE ANCHE $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x} = 0$

$\frac{(\sin x + 5)^2}{x} \leq \frac{6^2}{x} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{36}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sin x + 5)^2}{x} = 0$

$\frac{(\sin x + 5)^2}{x} \geq \frac{4}{x} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{16}{x} = 0$

RISOLVO

$\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} (\ln x)^5 + \sqrt{x} \qquad x^2 = t,\ x = \sqrt{t} \Rightarrow \lim_{t \to -\infty} e^{-t} (\ln \sqrt{t})^5 + t^{1/4} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot e^{-t} (\ln(t))^5 + t^{1/4} = +\infty$

$\sqrt{t} = t^{1/2}$, $\to 0$

QUALE ARGOMENTO ABBIAMO USATO?

SE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{y \to +\infty} g(y) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

SE LE 2 IPOTESI SONO VERIFICATE ALLORA

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} g(f(x)) = \lim_{y \to +\infty} g(y)$

VALE ANCHE PER LIMITE FINITO: SE $y_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$

$\lim_{y \to y_0} g(y) = l$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y)$

$x_0 \xrightarrow{f} y_0 \xrightarrow{g} l$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

NELL'ESEMPIO PRECEDENTE

$f(x) = x^2$

$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \to$

ESEMPIO

$\lim_{x \to 0} \frac{\log_2(1 + \frac{1}{x^2})}{(1 + \frac{1}{x^2})^3} \qquad g(y) = \frac{\log y}{y^3}, \quad f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

$g \cdot f(x) = \frac{\log_2(1 + \frac{1}{x_0})}{(1 + \frac{1}{x^2})^3}$

↗ $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 1 + \frac{1}{x^2} = +\infty$ (y_0)

↘ $\lim_{y \to +\infty} \frac{\log y}{y^3} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to +0} g(f(x)) = \lim_{y \to +\infty} g(y) = 0$

FUNZIONI CONTINUE $\Rightarrow |x|, x^b, P(x) = \sum_{i \leq m} a_i x^2, \frac{P(x)}{Q(x)}, a^x, \log_a x$, FUNZIONI GONIOMETRICHE

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in D$

f SI DICE CONTINUA IN x_0 SE $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\forall x_0 \in D$ $\Rightarrow f$ È CONTINUA A DX/SX IN x_0 SE $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = f(x_0)$

CONSEGUENZE

1. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ESISTE
2. x_0 DEVE APPARTENERE AL DOMINIO DI f
3. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(x_0)$

PROPRIETÀ f, g DUE FUNZIONI CONTINUE

$f + g \Rightarrow$ CONTINUE

$f \circ g \Rightarrow$ CONTINUE $\longrightarrow$ $f \circ g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f/g \Rightarrow$ CONTINUA SE $g(x_0) \neq 0$

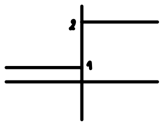
- SE g È CONTINUA IN $x_0 \in D$
- SE f È CONTINUA IN $g(x_0)$

ALLORA $f \circ g$ È CONTINUA IN x_0 $= \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$

ESEMPIO $f(x) = \frac{1}{x}$

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R} - \{0\}$ $\Rightarrow$ È CONTINUA MA SOLO NEL DOMINIO

ESEMPIO



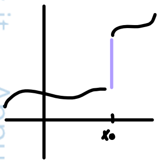
$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f NON È CONTINUA IN ZERO

$\hookrightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$

DISCONTINUITÀ

1) A SALTO $\Rightarrow$ f: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$



2) ELIMINABILI $\Rightarrow$ f: $\lim_{x \to x_0^-} = \lim_{x \to x_0^+} \neq f(x_0)$

ESEMPIO: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{CON } x \neq 0 \\ 0 & \text{CON } x = 0 \end{cases}$

$\downarrow$ CONTINUA

$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{CON } x \neq 0 \\ 1 & \text{CON } x = 0 \end{cases}$

ESERCIZI

1. $f(x) \begin{cases} |x+1| & x < 1 \\ e^x + k & x \geq 1 \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$

VOGLIO f. CONTINUA

$\hookrightarrow \lim_{x \to 1^-} |x+1| = \lim_{x \to 1^+} e^x + k \Rightarrow 2 = e + k \Rightarrow k = 2 - e$

2. $f(x) \begin{cases} \frac{16}{\pi} \cdot \arctan x & x \geq 1 \\ 2e^{x-1} & x < 1 \end{cases}$ $\begin{matrix} \to \left(\frac{\pi}{4} ; +\frac{\pi}{2}\right) \\ \to (0 ; 2) \end{matrix}$

DOM f^{-1} = Imm f

3. $\frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2+2i+i-1}{1+1} = \frac{1+3i}{2}$ $\qquad \frac{1}{2-i} \cdot \frac{1}{2+i} = \frac{1}{5}$ $\qquad \frac{4+i}{i} = \frac{4i}{-1}$