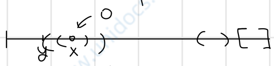
A, I topologia $\subset P(X)$

i suoi elementi sono gli aperti

sia $x \in X$, diciamo che U è un intorno di x se esiste $O \in A$ tale che $x \in O \subset U$



$x \in O \subset U$

ESERCIZIO

$x \neq 1$

$$\sum_{n=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$\hookrightarrow 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n$

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) = 1+x+x^2+\dots+x^n -x-x^2-x^3-x^n-x^{n-1} = 1-x^{n+1}$$

$x \to \frac{x}{y}$ $y \neq 0$

$$y^{n+1} \quad \left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{x}{y}+\left(\frac{x}{y}\right)^2+\dots+\left(\frac{x}{y}\right)^n\right) = 1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}$$

$$(y-x)(y^n+xy^{n-1}+x^2y^{n-2}+\dots+x^n) = y^{n+1}-x^{n+1}$$

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^n = 1-x^{n+1}$$

LIMITE

sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$

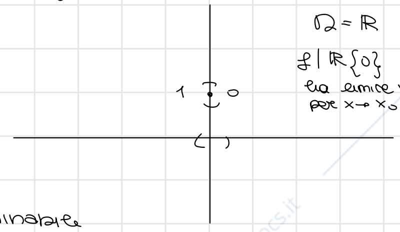
e $x_0 \in \mathbb{R}$ non necessariamente in Ω, diciamo che f ha limite l per x che tende a x_0 e scrivo

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

se per ogni intorno (aperto) O di l, esiste intorno aperto U di x_0 tale che $f(U \cap \Omega) \subset O$

f è continua se $\forall x_0 \in \Omega$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$f = 0$, $x \neq 0$
$f = 1$, $x = 0$



$\Omega = \mathbb{R}$

$f | \mathbb{R}\{0\}$ ha limite 0 per $x \to x_0$

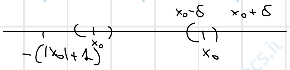
discontinuità eliminabile (ponendo $f(x) = 0$)

la funzione è $f = x^n$ è continua

$$|f(x)-f(x_0)| = |x^n - x_0^n| = |(x-x_0)(x_0^{n-1}+x_0x^{n-2}+\dots+x^{n-1})| \leq |x-x_0|\,|\underbrace{x_0^{n-1}+x_0x^{n-2}+\dots+x^{n-1}}_{n \text{ termini}}| \leq |x-x_0|\, n\,(|x_0|+1)^{n-1}$$

$$|x_0^a x^b| \leq (|x_0|+1)^a (|x_0|+1)^b \leq (|x_0|+1)^{n-1}$$

$|x| \leq |x_0| + 1$



$\delta = \dfrac{\varepsilon}{n(|x_0|+1)^{n-1}}$

se x: $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

sia $f: D \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$,

allora $a\, f: D \to \mathbb{R}$

$(a f)(x) = a\, f(x)$ è continua

Dim $x_0 \in D$, sia $\varepsilon > 0$

$|a f(x) - a f(x)| \leq |a f(x) - f(x_0)| \leq |a|\, |f(x) - f(x_0)|$ allora $|a f(x) - a f(x_0)| < |a| \varepsilon' \leq \varepsilon$

mi metto nel caso $a \neq 0$

siccome f è continua dato $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ trovo $\delta > 0$ per cui se $|x-x_0| < \delta$

allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon'$

se $f: D \to \mathbb{R}$ e $g: D \to \mathbb{R}$ $\quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

sono continue allora $f+g: D \to \mathbb{R}$ è continua

preso $\delta = \min(\delta_f, \delta_g)$

se $|x-x_0| < \delta$

allora

Dim sia $\varepsilon > 0$

$|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| = |[f(x) - f(x_0)] + [g(x) - g(x_0)]| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

$\exists\, \delta_f$ se $|x-x_0| < \delta_f$ $\quad |f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\exists\, \delta_g$ se $|x-x_0| < \delta_g$ $\quad |g(x) - g(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots$

$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin\left(\dfrac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\dfrac{x-x_0}{2}\right)$ $\quad \cos: \mathbb{R} \to [-1, 1]$

$|\sin x - \sin x_0| \leq |2 \sin \ldots \cos \ldots| \leq 2\, |\sin \ldots|\, |\cos \ldots|$

TEO 1

se f e g, $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$

sono continue, anche $f/g : D \setminus \{\text{zeri di } g\} \to \mathbb{R}$ è continua.

TEO 2

se f e g, $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$

sono continue anche $fg: D \to \mathbb{R}$

è continua