

Calcolo integrale

Argomenti della lezione:

- Integrali indefiniti
 - Integrazione per sostituzione e per parti
 - Integrazione delle funzioni razionali
- Integrali definiti
 - Proprietà dell'integrale definito
 - Il teorema fondamentale del calcolo integrale
 - Il teorema della media integrale

Integrali indefiniti

Definizione:

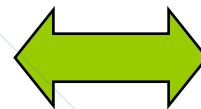
Assegnata la funzione f definita nell'intervallo I , diciamo che una funzione F con $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva di f in I se :

- 1) F è derivabile in I
- 2) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Esempio:

La funzione $F(x) = \sin x$ è una primitiva di $f(x) = \cos x$ in \mathbb{R} .
Infatti, la funzione $\sin x$ è sempre derivabile e inoltre si ha che $(\sin x)' = \cos x$, per ogni x

Cercare una
primitiva

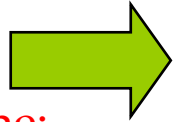


Derivazione

Procedimento
inverso

Integrali indefiniti

1) Data una funzione f esiste sempre una sua primitiva in I ?



Il teorema fondamentale del calcolo integrale implica:

Proposizione:

Ogni funzione continua in un intervallo I ammette una primitiva in I .

2) Se una primitiva esiste, è unica?

Osservazione:

Se ad esempio $F(x) = \sin x$, $G(x) = \sin x + 2003$, $H(x) = \sin x - \pi$; . . . sono tutte primitive di $f(x) = \cos x$

Proposizione:

Se una funzione f ammette una primitiva F in un intervallo I , allora:

- 1) ogni funzione della forma $F + c$ è anch'essa una primitiva di f , comunque si scelga la costante reale c ;
- 2) ogni altra primitiva G di f in I ha la forma $G = F + c$ per un'opportuna costante reale c .

conseguenza del Teorema di Lagrange

Definizione:

Integrali indefiniti

Data la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, l'insieme delle sue primitive si chiama integrale indefinito di f e si indica con $\int f(x)dx$.

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \{F : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ derivabili in } I \text{ t. c. } F'(x) = f(x) \forall x \in I\}$$

Osservazione: La proposizione precedente può essere riformulata:

Se F è una primitiva di una data funzione f : $\int f(x)dx = F(x) + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$.

3) come trovarla?

Esempi:

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int 2x dx = x^2 + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

In $I_1 = (0, +\infty)$ una primitiva di $f(x) = \frac{1}{x}$ è $\log x$

in $I_2 = (-\infty, 0)$ una primitiva di $f(x) = \frac{1}{x}$ è $\log(-x)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{In } I_1 = (0, +\infty) \text{ una primitiva di } f(x) = \frac{1}{x} \text{ è } \log x \\ \text{in } I_2 = (-\infty, 0) \text{ una primitiva di } f(x) = \frac{1}{x} \text{ è } \log(-x) \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c$$

Tabella delle primitive delle funzioni elementari

$\int 1 \, dx = x + c$	(1)
$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1$	(2)
$\int \frac{1}{x} \, dx = \log x + c$	(3)
$\int e^x \, dx = e^x + c$	(4)
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + c, \quad a > 0, a \neq 1$	(5)
$\int \cos x \, dx = \sin x + c$	(6)
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$	(7)
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$	(8)

Tabella delle primitive delle funzioni elementari

Esempio:

Dalla (2):

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$$

Proposizione:

Siano f e g continue su un intervallo I , allora :

$$1) \int af(x)dx = a \int f(x)dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$2) \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Esercizi:

$$1) \int \left(\frac{4}{x} + 3 \cos x + \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx \quad 3) \int \left(\frac{4}{x^2 + 1} - 2 \operatorname{sen} x - 3 \right) dx$$

$$2) \int \left(e^x + \frac{2}{x^2} \right) dx \quad 4) \int \frac{x^3 - 3\sqrt{x} + 1}{x^3} dx$$

Integrale indefinito di funzioni composte

La derivata di $(g \circ f)$ è data da : $(g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x)) \cdot f'(x)}_{\text{le primitive di questa sono :}} \cdot f'(x)$
 $(g \circ f)(x) + c$

quindi : $\int g'(f(x)) \cdot f'(x) dx = g(f(x)) + c$

Esempi:

$$\int \cos(x + 5) dx = \text{sen}(x + 5) + c$$

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + c$$

$$\int \frac{1}{2x - 1} dx = \frac{1}{2} \log |2x - 1| + c$$

Integrale indefinito di funzioni composte

Esempi di funzioni composte quando g è una funzione elementare:

$\int [f(x)]^a \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1$	(9)
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log f(x) + c$	(10)
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c$	(11)
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c, \quad a > 0, a \neq 1$	(12)
$\int f'(x) \cdot \cos(f(x)) dx = \sin(f(x)) + c$	(13)
$\int f'(x) \cdot \sin(f(x)) dx = -\cos(f(x)) + c$	(14)
$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan(f(x)) + c$	(15)

Esercizi:

1) $\int (e^x + 2x)\cos(e^x + x^2)dx$

2) $\int (\sin x)^3 \cos x dx$

3) $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

4) $\int (x + 4)^{17} dx$

5) $\int \cos(2x + 3) dx$

6) $\int xe^{x^2} dx$

7) $\int \frac{1}{1 - 3x} dx$

8) $\int \frac{3x + 2}{1 + x^2} dx$

9) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1 - x^3}} dx$

10) $\int \frac{x}{1 + x^4} dx$

11) Trovare la primitiva di $f(x) = x\sqrt[3]{1 - 2x^2}$
che passa per il punto $P = (0,1)$

Integrazione per parti

Se f e g sono derivabili in I , lo è anche il loro prodotto e vale :

$$(g \cdot f)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int \underbrace{f(x)}_{\text{fattore finito}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{fattore differenziale}} dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Esempio:

$$\int x^2 \log x dx = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + c$$

\downarrow
 $f(x) = \log x$
 $g'(x) = x^2$

Integrazione per parti

Osservazione

Non vi sono regole generali che ci permettono di sapere se e come integrare per parti, ma alcuni suggerimenti:

$$\left. \begin{array}{l} P(x)e^{ax} \\ P(x)\operatorname{sen}bx \\ P(x)\cos bx \end{array} \right\} \text{ scelgo il polinomio } P(x) \text{ come fattore finito}$$

$$P(x)\log x \rightarrow \text{fattore finito : } \log x$$

$$P(x)\operatorname{arctg}x \rightarrow \text{fattore finito : } \operatorname{arctg}x$$

$$\left. \begin{array}{l} e^{ax}\operatorname{sen}bx \\ e^{ax}\cos bx \end{array} \right\} \rightarrow \text{fattore finito : } \text{indifferente}$$

Esercizi:

$$1) \int xe^x dx$$

$$3) \int x\operatorname{sen}x dx$$

$$2) \int \log x dx$$

$$4) \int e^x \cos x dx$$

Integrazione delle funzioni razionali

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \quad N(x) \text{ e } D(x) \text{ polinomi con grado } N(x) < \text{grado } D(x)$$

Se grado $N(x) \geq$ grado $D(x) \Rightarrow$ divisione di polinomi :

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \quad (\text{grado } R(x) < \text{grado } D(x))$$

Esempio:

$$\int \frac{x+5}{x-2} dx = \int \left(1 + \frac{7}{x-2} \right) dx = x + 7 \log |x-2| + c$$

Esercizi:

$$\int \frac{x-3}{x^2+4} dx$$

$$\int \frac{x^2-3x+1}{x-1} dx$$

$$\int \frac{x^4-3x^3-1}{x^2-1} dx$$

$$\int \frac{x+3}{x+1} dx$$

Integrazione per sostituzione

1) Funzioni che contengono $\sqrt{ax + b} = t$

$$\Rightarrow ax + b = t^2$$

$$(ax + b)' = (t^2)'$$

$$adx = 2tdt \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{a}$$

2) Funzioni che contengono espr. razionali
di $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\log x$,
per le rispettive derivate.

Esercizi:

1) $\int \cos \sqrt{x} dx$

2) $\int x \sqrt{x - 1} dx$

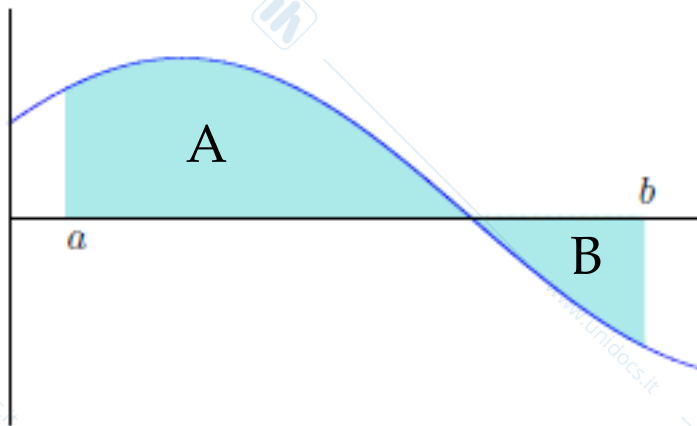
3) $\int \frac{1}{x \log^3 x} dx$

Integrali definiti

Definizione:

Sia f una funzione continua e limitata nell'intervallo $[a, b]$.

La regione di piano compresa tra l'asse x , le due rette verticali di equazione $x = a$ e $x = b$, ed il grafico di f è detta trapezoide relativo ad f e ad $[a, b]$, ed è denotata con il simbolo $T(f, [a, b])$.



Se $f(x) = C > 0$ l'area del trapezoide è semplicemente $C(b-a)$.



Cerchiamo una procedura generale per determinare l'area del trapezoide.



Def di integrale definito

Se $f(x)$ generica: nozione di **misura con segno** (-> estensione e posizione nel piano);

Solo se $f(x) > 0$: nozione di area e la nozione di misura con segno coincidono

Definizione: Integrali definiti

Il numero indicato con il simbolo $\int_a^b f(x) dx$ è l'integrale

definito di f in $[a; b]$ esprime la **misura con segno** del trapezoide.

Somme superiori ed inferiori

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua,

suddividiamo $[a, b]$ in n intervalli ($n \in \mathbb{N}$) di ampiezza $\frac{b-a}{n}$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Se M_i e m_i sono il massimo e il minimo di f in $[x_{i-1}, x_i]$

(\exists per teo. Weierstrass) le quantità

$$M_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{M_i(b-a)}{n} \quad \text{e} \quad m_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{m_i(b-a)}{n}$$

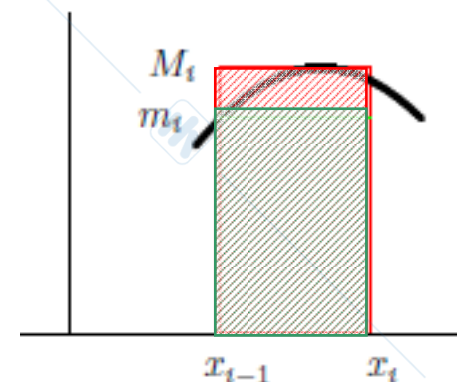
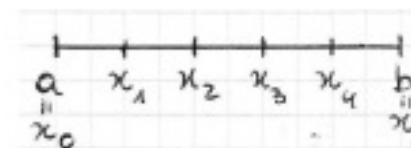
sono le misure con segno dei due rettangoli, che rispett.

contengono e sono contenuti nel $T(f, [x_{i-1}, x_i])$

Osservazione:

Se f non continua posso scegliere $\inf f$ e $\sup f$ in $[x_{i-1}, x_i]$

(def di integrale di Riemann)



Integrali definiti

Definizione:

La somma delle misure con segno del primo gruppo di n rettangoli

$$S_n = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n M_i$$

È detta somma superiore n -esima di f relativa ad $[a,b]$

Analogamente:

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n m_i$$

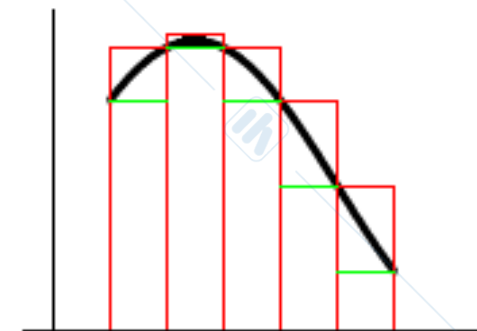
È detta somma inferiore n -esima di f relativa ad $[a,b]$

OSS:

M_i e m_i possono anche essere negativi e non avere il significato di altezza.

Osservazioni:

- 1) $s_n \leq S_n$
- 2) le due somme forniscono approssimazioni (rispettivamente per eccesso e per difetto) della misura con segno di $T(f; [a; b])$.



Integrali definiti

Al crescere di n cresce il numero di intervalli e ne decresce l'ampiezza;
le sequenze numeriche $\{s_n\}$ e $\{S_n\}$ soddisfano

$$m(b-a) = s_1 \leq s_n \leq S_n \leq S_1 = M(b-a)$$

Con m ed M il min e il max di f in $[a,b]$

→ esistono l'estremo inferiore di $\{S_n\}$ e l'estremo superiore di $\{s_n\}$

e vale: $\sup_n s_n \leq \inf_n S_n$

Definizione:

f è integrabile (secondo Riemann) in $[a,b]$ quando l'estremo superiore della classe delle somme inferiori e l'estremo inferiore della classe delle somme superiori coincidono. Il loro valore comune è il numero reale detto integrale definito di f esteso da a a b :

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_n S_n = \sup_n s_n$$

- $f(x)$ è detta funzione integranda
- x è la variabile di integrazione
- $[a, b]$ è detto intervallo di integrazione

Integrali definiti

L'integrale definito esprime la misura con segno del trapezoide $T(f, [a, b])$.

Si dice *area* del trapezoide $T(f, [a, b])$ l'integrale della funzione $|f|$, ovvero

$$\text{Area}(T(f, [a, b])) = \int_a^b |f(x)| dx.$$

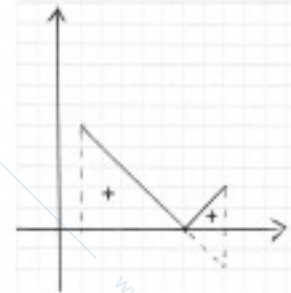
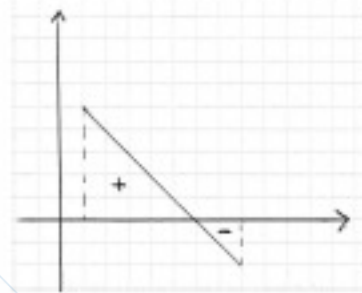
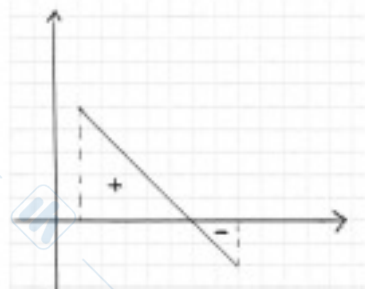


Figure : integrale definito e area

L'area coincide con l'integrale definito se e solo se $\forall x \in [a, b]$ si ha $f(x) \geq 0$.



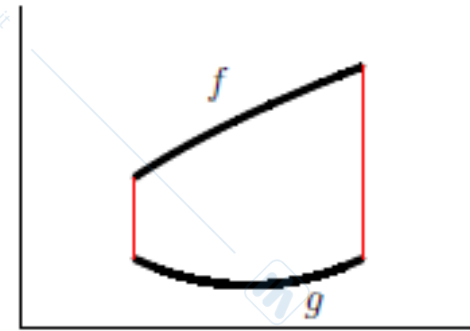
Altrimenti l'integrale si può ottenere sommando le aree delle regioni individuate da f e che si trovano nel semipiano superiore e sottraendo la somma delle aree nel semipiano inferiore.

Integrali definiti

Osservazione:

L'integrale definito ci permette di calcolare l'area di una regione di piano delimitata dai grafici di due funzioni continue f e g definite su $[a,b]$:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



Proprietà dell'integrale definito

- 1 Se $a < c < b$, si ha $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
- 2 Per convenzione $\int_a^a f(x) dx = 0$ e $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.
- 3 $\forall k \in \mathbb{R}, \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.
- 4 $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

La proprietà 1 viene detta *additività rispetto agli estremi di integrazione*, le proprietà 3 e 4 vengono dette *linearità*.

Integrali definiti

Quando esiste l'integrale definito di f limitata su $[a,b]$?

Condizioni sufficienti per l'integrabilità:

- f crescente (o decrescente) $\rightarrow f$ integrabile
- f continua $\rightarrow f$ integrabile
- f con numero finito di discontinuità $\rightarrow f$ integrabile
- f con un'infinità numerabile di discontinuità $\rightarrow f$ integrabile

La funzione integrale e il teorema fondamentale del calcolo integrale

L'integrale indefinito di f \longrightarrow Famiglia di funzioni

L'integrale definito di f \longrightarrow Numero

\exists legame fra i due concetti:

Definizione:

Se f continua in $[a, b]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ poniamo

$\int_a^x f(t) dt$ definendo così una funzione $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

detta funzione integrale di f : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

Teorema:

Sia f continua in $[a, b]$ e sia $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ la funzione integrale di f .

per un dato $x_0 \in [a, b]$. Allora :

1) F è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b)

2) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Corollario (Formula):

Sia f continua in $[a, b]$ e G una qualsiasi primitiva di f .

Allora :

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

Osservazioni:

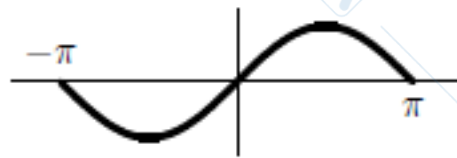
1) L'operazione di calcolo dell'integrale definito comporta:

- 1) Si determina una primitiva G di f
- 2) Si calcola il numero $G(b) - G(a)$

2) Il valore dell'integrale non dipende dalla primitiva di f che abbiamo scelto: tutte le primitive di f differiscono per costanti additive, e queste costanti vengono eliminate quando si calcola la differenza tra i valori assunti dalla primitiva scelta nei punti $x = a$ e $x = b$.

Il teorema fondamentale del calcolo integrale

ESEMPIO. Possiamo utilizzare la formula fondamentale del calcolo integrale per calcolare l'area e la misura con segno del trapezoide definito dalla funzione $f(x) = \sin(x)$ nell'intervallo $[-\pi, +\pi]$.



$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| dx = \int_{-\pi}^0 (-\sin(x)) dx + \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \\ &= [\cos(0) - \cos(-\pi)] + [-\cos(\pi) + \cos(0)] = [1 - (-1)] + [1 + 1] = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Misura con segno} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(\pi) + \cos(-\pi) = 1 - 1 = 0.$$

Il teorema della media integrale

Definizione:

Sia f continua in $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si dice media di f nell'intervallo $[a, b]$ il numero :

$$f_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Teorema:

Sia f continua in $[a, b] \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b]$ t. c.: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(x_0)$

