~~Dimostr~~

TEOREMA DI ROLLE

I PUNTO

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ e II PUNTO derivabile in $(a; b)$ e sia inoltre III PUNTO $f(a) = f(b)$ allora esiste almeno un punto c interno ad (a, b) in cui la tangente al grafico della funzione è parallela alla retta che congiunge i punti di coordinate $(a; f(a))$ e $(b; f(b))$ cioè alla retta $y = f(a)$

TEOREMA DI LAGRANGE

"Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) allora esiste un punto c interno ad (a, b) in cui la retta tangente al grafico della funzione è PARALLELA alla retta che congiunge i punti di coordinate $(a, f(a))$ $(b, f(b))$, ovvero le 2 rette hanno lo stesso coefficiente angolare $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

CAPITOLO 9
INTEGRALI
Definizione di Integrale definito
DEFINIZIONE 1
Una funzione S definita in $[a;b]$ è detta funzione a scala se esiste una partizione $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ dell'intervallo $[a;b]$ tale che S è costante ciascun sottointervallo (x_{k-1}, x_k) cioè:

$$S(x) = S_k \text{ per } x_{k-1} < x < x_k, \quad k = 1 \dots n$$

DEFINIZIONE 2
L'integrale di una funzione a scala S in $[a;b]$ è dato dalla seguente formula:

$$\int_a^b S(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} S_k \cdot \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{b}$$

DEFINIZIONE 3
Se esiste uno e un solo numero I tale che:

$$\int_a^b s(x)\, dx \leq I \leq \int_a^b t(x)\, dx$$

per ogni coppia di funzioni a scala s, t con $s \leq f \leq t$ allora si dice che f è integrabile in $[a;b]$.

I si dice L'INTEGRALE DEFINITO di f in [a; b] e si indica col simbolo:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

COROLLARIO:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

PROPOSIZIONE 1

TEOREMA 1 Ogni funzione f(x) continua nell'intervallo [a; b] è integrabile

TEOREMA 2 Ogni funzione f(x) monotona nell'intervallo [a; b] è integrabile

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_p = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta k$$

$$\lim_{|p| \to 0} I_p = l$$

PROPOSIZIONE 2

Sia f una funzione continua in $[a;b]$ allora:

$$\lim_{|P|\to 0} I_P = \int_a^b f(x)\,dx$$

in altre parole il valore dell'integrale definito di f si approssima sempre più quando l'ampiezza della partizione tende a zero

$$A = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta x_i = \int_0^{x_P} f(x)\,dx$$

PROPOSIZIONE 3 - PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\,dx = c_1 \int_a^b f(x) + c_2 \int_a^b g(x)\,dx$$

PROPOSIZIONE 4 - PROPRIETÀ DI MONOTONIA

$f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a;b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

PROPOSIZIONE 5

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

PROPOSIZIONE 6

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

TEOREMA 3 (del valore integrale)

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a;b]$$

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$$m \leq \int_a^b \frac{f(x)}{(b-a)} \leq M$$

IL QUOZIENTE A SINISTRA NELLA PRECEDENTE UGUAGLIANZA VIENE DETTO ALTEZZA MEDIA ~~DEL~~ DEL RETTANGOLO MISTILINEO DI BASE $[a;b]$ DELIMITATO DA $f(x)$

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{(b-a)} = f(c)$$

IL TEOREMA PRECEDENTE PUÒ ALLORA ANCHE ESPRIMERSI: L'ALTEZZA MEDIA VIENE RAGGIUNTA DALLA FUNZIONE CONTINUA $f(x)$ IN ALMENO UN PUNTO $c \in [a;b]$

DEFINIZIONE 4

Una funzione G si dice primitiva della funzione $g(x)$ nell'intervallo $[a;b]$ se la derivata di G è g cioè:

$$G'(x) = g(x) \text{ per ogni } x \in [a;b]$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

TEOREMA 4 (FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

Se f è una funzione continua in I, la funzione integrale $F(x)$ è derivabile in ogni punto x interno ad I e risulta $F'(x) = f(x)$

TEOREMA 5

Supponiamo che $F(x)$ sia una primitiva di $f(x)$ in I allora le primitive di $f(x)$ in I risultano essere tutte e sole le funzioni $G(x)$ della forma

$$G(x) = F(x) + c \quad \text{con } c \text{ costante reale}$$

TEOREMA 6

Sia $f(x)$ continua in $[a;b]$ e sia $G(x)$ una primitiva di $f(x)$ in $[a;b]$ allora vale la seguente FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$