

ANALISI 1 - TEORIA

- 1) Un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}$ è:
- **LIMITATO SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE)** se esiste un numero reale K tale che $x < k$ ($x > k$) per ogni $x \in X$;
 - **LIMITATO** se è limitato superiormente e inferiormente.

- 2) Dato un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}$, e un numero reale k , si dice che
- K è *maggiorante* di X se $x \leq k$ per ogni $x \in X$;
 - K è il *massimo* di X se $k \in X$ e k è un *maggiorante* di X ; si scrive $k = \max X$;
 - K è un *minorante* di X se $k \leq x$ per ogni $x \in X$;
 - K è il *minimo* di X se $k \in X$ e k è un *minorante* di X ; si scrive $k = \min X$.

E' chiaro che **il massimo e il minimo** di un insieme, se esistono, **sono unici**.

- 3) Dato un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}$, e un numero reale k , si dice che
- K è *l'estremo superiore* di X , e si scrive $k = \sup X$, se k è *il minimo dei maggioranti* di X ;
 - K è *l'estremo inferiore* di X , e si scrive $k = \inf X$, se k è *il massimo dei minoranti* di X .

E' chiaro che **l'estremo superiore** (inferiore), quando esiste, **è unico**; inoltre quando il massimo (minimo) esiste, esso coincide con l'estremo superiore (inferiore).

- 4) **ASSIOMA DI COMPLETEZZA** (di **DEDEKIND**)

Ogni sottoinsieme non vuoto $X \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente ammette estremo superiore.

- 5) **TEOREMA** (densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R}).

Comunque presi due numeri reali a, b , con $a < b$, esiste un numero razionale q tale che $a < q < b$.

I numeri razionali costituiscono un sottoinsieme denso di \mathbb{R} .

- 6) Dato $x \in \mathbb{R}$, il numero reale

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

si dice modulo o valore assoluto di x .

- 7) **TEOREMA**

Per ogni coppia di numeri reali x, y risulta:

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x|+|y|, \\ |xy| &= |x| |y|, \end{aligned}$$

- 8) **METODO DI DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE**

Sia $P(n)$ un predicato, in cui interviene il numero naturale n .

Se: 1. $P(1)$ è vero,

2. $P(n)$ implica $P(n+1)$ per ogni n ,

allora possiamo concludere che $P(n)$ è vero per ogni n .

- 9) **RELAZIONI E FUNZIONI**

È detta relazione tra l'insieme X e l'insieme Y il generico sottoinsieme R dell'insieme $X \times Y$; se $(x, y) \in R$ diciamo anche che l'elemento $x \in X$ è in relazione R con $y \in Y$.

Dati due insiemi X, Y ,

una relazione f tra l'insieme X e l'insieme Y è detta funzione di X in Y se per ogni $x \in X$ esiste uno e un solo $y \in Y$ tale che $(x, y) \in f$.

L'insieme X è detto dominio di f , mentre l'insieme Y è detto codominio di f ;

si scrive anche $f: X \rightarrow Y$ per indicare che f ha dominio X e codominio Y .

Se f è una funzione, si indica con $f(x)$, e si dice valore di f in x , o anche immagine di x mediante f , quell'unico y tale che $(x, y) \in f$; una relazione f che sia una funzione risulta dunque individuata una volta definito il suo valore $f(x)$ in ogni $x \in X$.

Quindi: **una funzione dell'insieme X (dominio) nell'insieme Y (codominio) è una legge che ad ogni elemento di X fa corrispondere uno ed un solo elemento di Y .**

10) IMMAGINE E CONTROIMMAGINE DI UNA FUNZIONE

Assegnata $f: X \rightarrow Y$ e un sottoinsieme $I \subset X$, si dice **immagine** di I mediante f , e si indica con $f(I)$, il sottoinsieme degli elementi di Y che sono valori di f di elementi in I .

Inoltre $f(X)$ è detto immagine di f .

Sia poi $J \subset Y$; diciamo **controimmagine** di J mediante f , ed indichiamo $f^{-1}(J)$, il sottoinsieme degli elementi di X la cui immagine appartiene a J .

11) PRINCIPALI TIPI DI FUNZIONI

- Se per $f: X \rightarrow Y$ risulta $f(X) = Y$, si dice allora che f è **suriettiva**;
- Si dice che f è **iniettiva** se per ogni coppia di elementi $x_1, x_2 \in X$, con $x_1 \neq x_2$, risulta sempre $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- Si dice che f è una **biiezione**, o anche corrispondenza **biunivoca**, se è contemporaneamente suriettiva e iniettiva;
- Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione iniettiva, chiamiamo funzione **inversa** di f , ed indichiamo con f^{-1} , la funzione di dominio $f(X)$ e codominio X che in $y \in f(X)$ ha per valore quell'unico elemento $x \in X$ per cui $y = f(x)$;
- Date $f: X \rightarrow Y$ e $g: Z \rightarrow W$ con $f(X) \subset Z$, si definisce **composizione** di f e g , e si indica con $g \circ f$, la funzione di dominio X e codominio W che in $x \in X$ ha per valore $g(f(x))$.
- Data una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ si definiscono gli **estremi superiori ed inferiori** di f su X come

$$\sup f(x) = \sup f(X), \quad x \in X;$$

$$\inf f(x) = \inf f(X), \quad x \in X;$$

Una tale funzione si dice **limitata superiormente** (limitata inferiormente) se la sua immagine è $f(X)$;

- Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.
Diciamo che f è **crescente** in X se per ogni $x_1, x_2 \in X$, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) \leq f(x_2)$ e che f è **decrescente** in X se risulta $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Una funzione si dice **monotona** in X se è sempre crescente oppure sempre decrescente.
OSS: Una funzione monotona è sicuramente iniettiva.
- Funzione segno, parte intera, mantissa, valore assoluto, polinomiale, radice, esponenziale, logaritmica, trigonometrica.

12) FUNZIONI CONTINUE

- Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$.
Definiamo **intorno (simmetrico)** di x_0 e raggio δ l'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Abbiamo quindi che, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sse $|x - x_0| < \delta$.
- Sia $X \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$.
Una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **continua** in x_0 se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che, se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

OSS: In pratica per verificare la continuità di una f in x_0 si considera la disequazione $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, e si mostra quindi che essa è verificata dagli $x \in X$ soddisfacenti $|x - x_0| < \delta$ per qualche $\delta > 0$.

- Una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **continua su X** se è continua in ogni punto di X .
- Una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **uniformemente continua** su X se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che, se $x_1, x_2 \in X$ e $|x_1 - x_2| < \delta$ allora $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

TEOREMA (di Heine-Cantor)

Sia f una funzione definita e continua su un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato. Allora f è uniformemente continua su tutto $[a, b]$.

13) LIMITI DI FUNZIONI E TIPI DI DISCONTINUITA'

- **Limite di una funzione non continua in x_0 .**
Sia fissato un $x_0 \in \mathbb{R}$ e si denoti con X il dominio della funzione f ;
Supponiamo che X contenga un intorno x_0 privato di x_0 stesso, ossia $(x_0 - h, x_0) \cup (x_0, x_0 + h)$;

Si dice che f ha limite l , o tende a l , per x che tende a x_0 , e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che, se $x \in X$, $x \neq x_0$ e $|x - x_0| < \delta$ risulta $|f(x) - l| < \varepsilon$.

E' chiaro dalla definizione che, se f è definita in un intorno x_0 ,

$$f \text{ è continua in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

- **TEOREMA DELL'UNICITA' DEL LIMITE**
Una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ non può tendere a due limiti distinti per $x \rightarrow x_0$.
- **DISCONTINUITA' ARTIFICIALE (o ELIMINABILE)**
Supponiamo che esista il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, ma che f non sia definita in x_0 , oppure sia definita ma $f(x_0) \neq l$.
Allora diciamo che f ha una **discontinuità artificiale, o eliminabile**, in x_0 .

Nel caso in cui il limite della funzione esiste ma è $\pm\infty$, la discontinuità non può essere eliminata.
Si dice che $f(x)$ ha limite $\pm\infty$ per x tendente a x_0 , e si scrive: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$.

Diciamo che f ha limite $l \in \mathbb{R}$ per x tendente a $\pm\infty$, e scriviamo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$ se per ogni $\epsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{R}$ tale che, se $\forall x \in X$, $x > K$ risulti $|f(x) - l| < \epsilon$.



QUATTRO TEOREMINI FRANCESI**1. Fermat**

$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in (a,b)$ punto di estremo relativo;

f è derivabile in x ;

Allora,

$$f'(x) = 0.$$

2. Rolle

$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$;

f continua su $[a,b]$;

f derivabile su (a,b) ;

$f(a) = f(b)$;

Allora, esiste $c \in (a,b)$, t. c.:

$$f'(c) = 0.$$

3. Cauchy

Siano $f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

f, g continue su $[a,b]$;

f, g derivabili su (a,b) ;

$\forall x \in (a,b)$, e $g'(x) \neq 0$;

Allora, esiste $c \in (a,b)$, t. c.:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

4. Lagrange

Siano $f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

f, g continue su $[a,b]$;

f, g derivabili su (a,b) ;

Allora, esiste $c \in (a,b)$, t. c.:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

INTEGRALI

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione monotona, allora è integrabile su $[a, b]$;

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora è integrabile su $[a, b]$;

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua a tratti, allora è integrabile su $[a, b]$;

ALGEBRA DEGLI INTEGRALI

Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili su $[a, b]$,

allora, $f + g$ integrabile su $[a, b]$;