Il secondo metodo si basa sul fatto che $\dim(W) = t$ se e solo se

$$\varrho\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & h & 2 & h\\ 1 & 1+h & 1 & 2h\end{pmatrix} = t.$$

Procedendo con operazioni elementari di riga si ottiene

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & h & 2 & h\\ 1 & 1+h & 1 & 2h\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & h & 0 & h\\ 1 & 1+h & 1 & 2h\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & h & 0 & h\\ 0 & 1+h & 0 & 2h\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & h & 0 & h\\ 0 & 1 & 0 & h\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & h & 0 & h\\ 0 & h-1 & 0 & 0\end{pmatrix} = A_h.$$

In particolare

$$\varrho\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & h & 2 & h\\ 1 & 1+h & 1 & 2h\end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & h & 0 & h\\ 0 & h-1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

da cui si ricava il risultato ottenuto sopra per altra via.

Questo secondo metodo ha il vantaggio di permetterci di dare risposta al secondo quesito immediatamente. Infatti se $h \neq 0, 1$, per esempio $h = 2$, i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, infatti

$$\varrho(A_2) = \varrho\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = 3.$$

Ma si vede subito che scelto $v_4 := (0, 0, 1, 0)$ anche i vettori $v_{1,2}, v_3, v_4$ sono linearmente indipendenti poiché

$$\varrho\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = 4.$$

In particolare $(v_{1,2}, v_3, v_4)$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 5. Siano

$$V_1 := \{\ (0, a, c, d) \mid a, c, d \in \mathbb{R}\ \}, \qquad V_2 := \{\ (q, p, q, r) \mid p, q, r \in \mathbb{R}\ \}.$$

(1) Verificare che V_1 e V_2 sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$ e determinare basi di V_1 e di V_2.
(2) Determinare una base di $V_1 \cap V_2$.
(3) Calcolare $V_1 + V_2$ e determinarne una base.

Svolgimento. Verifichiamo che V_1 è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Innanzi tutto $(0, 0, 0, 0) \in V_1$. Poi

$$\alpha(0, a, c, d) = (0, \alpha a, \alpha c, \alpha d) \in V_1,$$
$$(0, a, c, d) + (0, a', c', d') = (0 + 0, a + a', c + c'd + d') \in V_1.$$

Si noti che $e_2 := (0, 1, 0, 0), e_3 := (0, 0, 1, 0), e_4 := (0, 0, 0, 1) \in V_1$ e $(0, a, c, d) = ae_2 + ce_3 + de_4$. L'identità di cui sopra implica anche che (e_2, e_3, e_4) è una base di V_1.