• Tutte le tipologie delle equazioni differenziali

TIPOLOGIA 1 (trovare la c)

1) $y' = x^2 \cos x - e^{\cos x} \operatorname{sen} x$ (trovare la c con x e y nei posti corretti)

i) sostituire y con $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cos x - e^{\cos x} \operatorname{sen} x$$

ii) moltiplicare sia a destra che a sinistra per dx

$$\cancel{dx}\,\frac{}{\cancel{dx}}\quad x^2 \cos x - e^{\cos x} \operatorname{sen} x \; dx$$

iii) integro sia a destra, sia a sinistra

$$\int dy = \int x^2 \cos x - \int e^{\cos x} \operatorname{sen} x \; dx$$

integrale di dy = y

1 integrazione per parti

2 integro per sostituzione perché c'è "e" elevato a qualcosa ≠ di x

1) integrazione per parti ⟶ $f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)$

integrale, integrale, rimane uguale, derivata

$$\int \overset{f(x)}{x^2} \cdot \overset{g(x)}{\cos x}$$

$$x^2 \cdot \sin x - \int 2x \sin x$$

non devo avere x quindi integro per parti un'altra volta

$$x^2 \cdot \sin x - \left(2x \cdot (-\sin x) - \int 2 \cdot (-\cos x)\right)$$

$$x^2 \cdot \sin x + 2x \sin x + 2 \sin x$$ ⟶ risultato 1

2 $\int e^{\cos x} \sin x \; dx$ i) impongo $t = e^{\cos x}$

ii) trovo $t' =$ derivata $e^{\cos x} = e^{\cos x} \cdot -\sin x$ ⟶ equivale a dt che deve essere sostituito a dx ma al contrario, es: $2x \rightarrow \frac{1}{2x}$, $5x^3 \rightarrow \frac{1}{5x^3}$

$$-\int \cancel{e^{\cos x} \sin x} \cdot \frac{1}{\cancel{e^{\cos x} \sin x}}$$

$-\int -1 \longrightarrow t \longrightarrow$ t e non x perché abbiamo sostituito

$t = e^{\cos x}$

iv) uniamo i risultati ottenuti

$$y = \underbrace{x^2 \sin x + 2x \cos x + 2 \sin x}_{1} + \underbrace{e^{\cos x}}_{2}$$

Domanda 2 $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ⟶ al posto di x mettiamo $\frac{\pi}{2}$

Dato dal testo

al posto di y mettiamo 0

lo scopo è sostituire la x e la y per trovare la c

$$0 = x^2 \sin x + 2x \cos x + 2 \sin x + e^{\cos x}$$

$$0 = \frac{\pi}{2} \cdot 1 + \pi \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 + C$$

$$\frac{\pi^2}{4} + 2 + 1 + C \longrightarrow C = -\frac{\pi}{9} - 3$$

2) $y' = \dfrac{x^2 \cdot e^x}{y^2}$ (trovare c con un y a destra da spostare a sinistra) → dobbiamo avere y a sinistra

diventa sempre $\dfrac{dy}{dx}$

$\int y^2 = \int x^2 e^x$

① ②

① $\dfrac{y^{2+1}}{3} = \dfrac{y^3}{3}$ risultato

② $\int x^2 e^x$ → dato che troviamo la "e" si può pensare a sostituire ma ATTENZIONE, ha come esponente la x non altro

utilizzeremo quindi integrazione per parti

$\int x^2 e^x$ → $f(x)$, $g(x)$

$x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x$

→ c'è ancora la x → integriamo nuovamente

$x^2 \cdot e^x - \left(2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x\right)$

$x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$ risultato

* uniamo i risultati ottenuti

$\dfrac{y^3}{3} = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$ → moltiplico per 3 a destra $\quad y^3 = 3x^2 e^x - 6xe^x + 6e^x + c$

3 → così elimino questo 3

Domanda 2 (troviamo la c)

$y(1) = \sqrt[3]{e}$ → al posto di x mettiamo 1

→ al posto di y mettiamo $\sqrt[3]{e}$

Dato dal testo

$y^3 = 3x^2 e^x - 6xe^x + 6e^x + c$

$\sqrt[3]{e} = 3e - 6e + 6e + c$

$\sqrt[3]{e} = 3e - \cancel{6e} + \cancel{6e} + c$

$\sqrt[3]{e} = 3e + c$

$c + 3e = \sqrt[3]{e}$

$c = \sqrt[3]{e} + 3e$

3) $y' = 2x\left(e^{x^2+1}\right) + \frac{3}{x^2+1}$ (Trovare la c con y e x nelle parti giuste)

$dy = 2x\left(e^{x^2+1}\right) + \frac{3}{x^2+1}\,dx$

$y = \int 2x\left(e^{x^2+1}\right) + 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

1 2

1 $\int 2x\left(e^{x^2+1}\right)$ $\quad t = e^{x^2+1} \quad t' = e^{x^2+1} \cdot 2x$

$\int \cancel{2x\left(e^{x^2+1}\right)} \cdot \frac{1}{\cancel{e^{x^2+1} \cdot 2x}}$

$\int 1 \longrightarrow t = e^{x^2+1}$ Risultato

2 $3\int \frac{1}{x^2+1} \longrightarrow$ so che $\frac{1}{x^2+1}$ e' l'integrale di arctan di x

$3\arctan(x)$ Risultato

★ uniamo i risutati uttenuti

$y = e^{x^2+1} + \arctan(x) + c$

Domanda 2 (troviamo la c)

$y(0) = e \longrightarrow$ sostituiamo ad x lo 0

$\longrightarrow$ la $y = e$

Dato dal testo

$\arctan(0) = 0$

$y = e^{x^2+1} + \arctan(x) + c$

$e = e + 0 + c$

$c = \cancel{e} - \cancel{e} \longrightarrow c = 0$

TIPOLOGIA 2 (trovare i parametri)

1) $y'' - 3x\,y' - 6xy + 12x^2 + ax = 0$ ← qui lo zero, importante, vedremo il perché nell'esercizio seguente

$y = e^{x^3} + ax + b$

i) il nostro scopo è quello di trovare la y' e y'' per poi sostituirle qui, le troviamo grazie alla y che ci viene data

- la y' corrisponde alla derivata della y
- la y'' corrisponde alla derivata della y'

- $y = e^{x^3} + ax + b$
- $y' = e^{x^3} \cdot 3x^2 + a$

$y'' = (e^{x^3} \cdot 3x^2 \cdot 3x^2) + (e^{x^3} \cdot 6x)$ → se abbiamo derivata di un prodotto

- $y'' = 9x^4 e^{x^3} + 6x e^{x^3}$

$a \cdot b = (A \cdot b) + (a \cdot B)$ → DERIVATA b

↳ derivata a

ii) sostituiamo le y

$y'' - 3x\,y' - 6xy + 12x^2 + ax = 0$

$$\underbrace{(9x^4 e^{x^3} + 6x e^{x^3})}_{y''} - 3x^2 \underbrace{(e^{x^3} \cdot 3x^2 + a)}_{y'} - 6x\underbrace{(e^{x^3} + ax + b)}_{y} + 12x^2 + 9x = 0$$

$$\cancel{9x^4 e^{x^3}} + \cancel{6x e^{x^3}} - \cancel{9x^4 e^{x^3}} - \underbrace{3ax^2 - \cancel{6x e^{x^3}} - 6ax^2}_{-9ax} - 6bx + 12x^2 + 9x = 0$$

$-3ax^2 - 6ax^2 + 12x^2 - 6xb + 9x$

iv) Raccogliamo quello che possiamo (in base alle x)

$-3ax^2 - 6ax^2 + 12x^2 - 6bx + 9x$

$x^2(-6a + 12 - 3a) = 0$

$x(-6b + 9) = 0$

v) imponiamo quello che abbiamo raccolto $= 0$

$$\begin{cases} -3a - 6a + 12 = 0 \\ -6b + 9 = 0 \end{cases} \qquad a = \frac{4}{3} \quad b = \frac{3}{2}$$

ottieniamo così i parametri

RISOLVIAMO IL SISTEMA

2) $y'' + y' + y = e^{2x} + x$ ⟶ non è zero, vedremo poi importanza $y = ae^{kx} + bx + c$

- $y = ae^{kx} + bx + c$ ⟶ a, b, k sono dei numeri (NON DIMENTICHIAMOCELO)
- $y' = ae^{kx} \cdot k + b$

  $y'' = ae^{kx} \cdot k \cdot k$
- $y'' = ae^{kx} \cdot k^2$

$y'' + y' + y = e^{2x} + x$

$\underbrace{(ae^{kx} \cdot k^2)}_{y''} \underbrace{(ae^{kx} \cdot k + b)}_{y'} \underbrace{(ae^{kx} + bx + c)}_{y} = e^{2x} + x$

$ae^{kx}k^2 + ae^{kx}k + b + ae^{kx} + bx + c = e^{2x} + x$

ii) Raccogliamo

$e^{kx}(ak^2 + ak + a) + bx + b + c = e^{2x} + x$ ⟶ non avendo lo zero dobbiamo ragionare

- abbiamo a sinistra e^{kx} e a destra e^{2x}

$e^{kx}(ak^2 + ak + a) + bx + b + c = e^{2x} + x$

$e^{kx} = e^{2x}$ quando $\boxed{k = 2}$

- abbiamo una bx a sinistra e una x a destra

$e^{kx}(ak^2 + ak + a) + bx + b + c = e^{2x} + x$

$bx = x$ quando $\boxed{b = 1}$

- abbiamo una b e una c a sinistra, ma nessun termine noto a destra, possiamo vederla come

$e^{kx}(ak^2 + ak + a) + bx + b + c = e^{2x} + x + 0$

$b + c = 0$

↳ abbiamo trovato la $b = 1$ ⟶ $1 + c = 0$ ⟶ $\boxed{c = -1}$

I parametri finali sono

$k = 2$

$b = 1$

$c = -1$