Analogamente osserviamo che $(0,0,0,0) \in V_2$. Poi

$$\alpha(q,p,q,r) = (\alpha q, \alpha p, \alpha q, \alpha r) \in V_1,$$
$$(q,p,q,r) + (q',p',q',r') = (q+q', p+p', q+q', r+r') \in V_1.$$

Definiamo $e = (1,0,1,0)$. Si noti che $e_2, e_4, e \in V_2$ e $(q,p,q,r) = qe + pe_2 + re_4$. Ancora l'identità di cui sopra implica che (e_2, e_4, e) è una base di V_2.

Studiamo $V_1 \cap V_2$. Risulta che $v \in V_1 \cap V_2$ se e solo se è della forma $(0,p,0,r) = (0,a,0,d)$. In particolare $e_2, e_4 \in V_1 \cap V_2$, sono linearmente indipendenti (come osservato sopra) e, per esempio $(0,a,0,d) = ae_2 + de_4$, quindi (e_2, e_3) è base di $V_1 \cap V_2$ che, perciò, ha dimensione 2.

Risulta

$$V_1 + V_2 = \mathcal{L}(e_2, e_3, e_4) + \mathcal{L}(e_2, e_4, e) = \mathcal{L}(e_2, e_3, e_4, e).$$

Si noti che $e_1 = e - e_3$ sicché

$$V_1 + V_2 = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4.$$

Segue che (e_1, e_2, e_3, e_4) è base di $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$. Ovviamente anche (e_1, e_2, e_3, e) è una base di $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 6. Siano

$$A := (1,1,1,0), \quad B := (1,2,0,-1), \quad C := (0,-1,1,1),$$
$$D := (1,0,-1,3), \quad E := (3,3,0,2)$$

e $W := \mathcal{L}(A,B,C,D,E)$.

(1) Determinare $\dim(W)$.
(2) Determinare una base $\mathcal{B}$ di W i cui elementi siano in $\{A,B,C,D,E\}$.
(3) Verificare che $F := (2,2,-1,2) \in W$ e determinarne le componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$.
(4) Completare $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{C}$ di V e determinare le componenti di F rispetto a $\mathcal{C}$.

Svolgimento. Chiaramente $\dim(W) \leq \dim(\mathbb{R}^4) = 4$. È sufficiente ridurre con operazioni elementari di riga la matrice M d'ordine 5×4 avente per righe i vettori A, B, C, D, E

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 \to R_5 - 3R_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 \to R_5 - R_4}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$