Quiz 5. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy siano dati il punto $C(1,1)$ e la retta r d'equazione $x+y=0$. Sia poi $\mathcal{C}$ l'iperbole equilatera avente un asse parallelo ad r, centro in C e passante per O. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Una tale $\mathcal{C}$ esiste ed ha equazione $xy+x+y=0$.
b) Una tale $\mathcal{C}$ non esiste.
c) Una tale $\mathcal{C}$ esiste ed ha equazione $xy-x-y=0$.
d) Una tale $\mathcal{C}$ esiste e non interseca la retta s di equazione $3x-7y=0$.

Svolgimento. Un asse di $\mathcal{C}$ è parallelo ad r. Poiché per un'iperbole gli assi sono bisettrici degli angoli formati dagli asintoti, e $\mathcal{C}$ deve essere equilatera, segue che gli asintoti sono paralleli agli assi coordinati. Poiché devono passare per il centro di $\mathcal{C}$ segue che gli asintoti devono avere equazioni $x-1=0$ ed $y-1=0$. In particolare $\mathcal{C}$ deve avere equazione

$$(x-1)(y-1)+c=0$$

per un opportuno $c\in\mathbb{R}$. La costante c deve essere scelta in modo tale che le coordinate di O soddisfino l'equazione. Perciò l'equazione di $\mathcal{C}$ è

$$xy-x-y=0.$$

Concludiamo che le affermazioni a) e b) sono false, mentre l'affermazione c) è vera. Infine l'affermazione d) è falsa perché sia $\mathcal{C}$ che s passano per il punto O.

Quiz 6. Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy sia data la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$x^2-4xy+5y^2+18x-4y+11=0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) Esiste un sistema di riferimento rispetto a cui $\mathcal{C}$ ha equazione

$$x^2+2y^2=1.$$

b) $\mathcal{C}$ è un'ellisse immaginaria.
c) Esiste una traslazione che trasforma l'equazione di $\mathcal{C}$ in

$$x^2+17y^2-11x+\sqrt{29}y+3=0.$$

item"d)" $\mathcal{C}$ è un'ellisse reale.

Svolgimento. Le affermazioni a), b) e d) equivalgono a domandarsi quale sia una forma canonica di $\mathcal{C}$. Pertanto procediamo individuandone una.

A tale scopo osserviamo che le matrici di $\mathcal{C}$ sono

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 9\\ -2 & 5 & -2\\ 9 & -2 & 11\end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è

$$A=\begin{vmatrix}1-t & -2\\ -2 & 5-t\end{vmatrix}=t^2-6t+1=(t-3-\sqrt{8})(t-3+\sqrt{8}).$$

dunque i suoi autovalori sono $\lambda_1=3-\sqrt{8}$ e $\lambda_2=3+\sqrt{8}$. Risulta poi $\det(A)=1$, $\det(B)=-326$. Concludiamo che un'equazione canonica per $\mathcal{C}$ è

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2=-\det(B)/\det(A),$$