Esercizio 2. Sia $V := \mathbb{R}^4$. Stabilire quale dei seguenti sottoinsiemi di V è suo sottospazio:

$$V_1 := \{\ (a,b,c,d) \in V \mid a+b+c+d=0\ \},$$
$$V_2 := \{\ (a,b,c,d) \in V \mid a=2\ \},$$
$$V_3 := \{\ (a,b,c,d) \in V \mid (a,b,c,d) = 2(a',b',c',d'),\ (a',b',c',d') \in V\ \}.$$

Svolgimento. Procediamo come nell'esercizio precedente. Iniziamo da V_1. Allora $(0,0,0,0) \in V_1$ perché $0+0+0+0=0$. Sia $(a,b,c,d) \in V_1$: allora $a+b+c+d=0$, dunque

$$(\alpha a)+(\alpha b)+(\alpha c)+(\alpha d) = \alpha(a+b+c+d) = 0,$$

cioè $\alpha(a,b,c,d) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) \in V_1$. Siano $(a,b,c,d), (a',b',c',d') \in V_1$: allora $a+b+c+d = a'+b'+c'+d' = 0$, dunque

$$(a+a')+(b+b')+(c+c')+(d+d') = (a+b+c+d)+(a'+b'+c'+d') = 0,$$

cioè $(a,b,c,d)+(a',b',c',d') \in V_1$. Concludiamo che V_1 è un sottospazio.

Consideriamo poi l'insieme V_2. Si noti che se $(a,b,c,d) \in V_2$ allora $(a,b,c,d) = (2,b,c,d)$: ne segue che $(0,0,0,0) \notin V_2$ da cui se ne deduce che V_2 non è un sottospazio.

Infine studiamo V_3. Si noti che se $(a,b,c,d) \in V$ allora

$$(a,b,c,d) = 2(a/2, b/2, c/2, d/2)$$

sicché $(a,b,c,d) \in V_3$. Concludiamo che $V = V_3$ e, perciò, V_3 è un sottospazio (banale).

Ovviamente si poteva arrivare a questa conclusione anche verificando le tre condizioni come nei casi precedenti.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 := (1,0,2), \quad v_2 := (3,1,0), \quad v_3 := (0,1,1), \quad v_4 := (5,1,4).$$

Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica se è vera o falsa e perché.

(1) $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(v_1) + \mathcal{L}(v_2, v_3)$.
(2) $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(v_1) + \mathcal{L}(v_3, v_4)$.
(3) $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(v_1, v_2) + \mathcal{L}(v_4)$.

Svolgimento. Iniziamo ad osservare che i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Infatti si consideri la relazione di dipendenza lineare $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ cioè, per esteso,

$$x(1,0,2) + y(3,1,0) + z(0,1,1) = 0.$$

Lavorando sulle componenti si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ y+z=0 \\ 2x+z=0. \end{cases}$$

Perciò dalla seconda e dalla terza equazione $y=-z$, $x=-z/2$: sostituendo nella prima si verifica $x=y=z=0$. In particolare abbiamo tre vettori, precisamente v_1, v_2, v_3, linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ che quindi generano un sottospazio di dimensione 3: perciò $\mathcal{L}(v_1)+\mathcal{L}(v_2,v_3) = \mathcal{L}(v_1,v_2,v_3) = \mathbb{R}^3$