Lezione 19

19.1 Autovalori, autovettori ed autospazi di endomorfismi

Abbiamo visto che per descrivere un'applicazione lineare fra spazi vettoriali finitamente generati la cosa più semplice è quella di considerare la sua matrice rispetto a certe basi fissate.

Un caso particolarmente interessante è quello di un endomorfismo f di uno spazio vettoriale finitamente generato V. In tal caso può essere utile riuscire a determinare una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ tale che la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ sia particolarmente semplice, per esempio diagonale: ricordando come è definita tale matrice, questo significa chiedere l'esistenza di $\lambda_i \in K$ tali che $[f(v_i)]_{\mathcal{B}} = \lambda_i e_i$, cioè

$$f(v_i) = \lambda_i [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i) = \lambda_i v_i.$$

Purtroppo ciò in generale non accade. Tuttavia i vettori aventi tale proprietà per un fissato endomorfismo sono di particolare interesse ed importanza: per tale motivo introduciamo la seguente definizione.

Definizione 19.1 (Autovalori, autovettori e autospazi di un endomorfismo). Sia V uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e sia $f \colon V \to V$ un endomorfismo.

- Uno scalare $\lambda \in K$ si dice *autovalore di f* se esiste $v \in V \setminus \{ 0_V \}$ tale che $f(v) = \lambda v$.
- Se $\lambda \in K$ è un autovalore di f, ogni vettore $v \in V \setminus \{ 0_V \}$ tale che $f(v) = \lambda v$ si dice *autovettore di f relativo a λ*.
- Se $\lambda \in K$ è un autovalore di f, l'insieme

  $$E_f(\lambda) = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \}$$

  viene detto *autospazio di f relativo a λ*.

Se $A \in K^{n,n}$ si parla di autovalori, autovettori ed autospazi di A in luogo di μ_A.

In particolare l'autospazio $E_f(\lambda)$ è l'unione dell'insieme degli autovettori di f relativi a λ e l'insieme $\{ 0_V \}$.

Siano V uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $f\colon V \to V$ un endomorfismo e λ un suo autovalore. Si noti che, nella definizione di autovalore, l'esistenza di $v \in V$ non nullo tale che $f(v) = \lambda v$ è necessaria affinché la definizione sia ben posta: infatti se cancellassimo la condizione $v \neq 0_V$ ogni $\lambda \in K$ sarebbe autovalore di f! Questa condizione di non nullità implica $E_f(\lambda) \neq \{ 0_V \}$ per ogni autospazio.

Proposizione 19.2. *Sia V uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Se $f\colon V \to V$ è un endomorfismo di V, allora $\lambda \in K$ è autovalore di f se e solo se $f - \lambda id_V\colon V \to V$ non è iniettivo.*

In tal caso $E_f(\lambda) = \operatorname{Ker}(f - \lambda id_V)$: in particolare $E_f(\lambda)$ è un sottospazio di V.

Dimostrazione. Uno scalare $\lambda \in K$ è autovalore di f se e solo se esiste $v \in V \setminus \{ 0_V \}$ tale che

$$\begin{aligned} f(v) = \lambda v \quad &\Leftrightarrow \quad (f - \lambda id_V)(v) = f(v) - \lambda v = 0_V \\ &\Leftrightarrow \quad 0_V \neq v \in \operatorname{Ker}(f - \lambda id_V). \end{aligned}$$ □

In particolare, se $A \in K^{n,n}$ è una matrice, gli autovalori di A sono i $\lambda \in K$ per cui

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(\mu_A - \lambda id_{K^{n,1}}) &= \operatorname{Ker}(\mu_A - \lambda \mu_{I_n}) = \operatorname{Ker}(\mu_{A - \lambda I_n}) \\ &= \{ X \in K^{n,1} \mid (A - \lambda I_n)X = 0_{n,1} \} \neq \{ 0_V \} \end{aligned}$$

e, in tal caso, $E_A(\lambda) = \{ X \in K^{n,1} \mid (A - \lambda I_n)X = 0_{n,1} \}$. Quindi gli autovalori di A sono i numeri $\lambda \in K$ tali che il sistema $(A - \lambda I_n)X = 0_{n,1}$ abbia soluzioni non banali, cioè tali che $\operatorname{rk}(A - \lambda I_n) \leqslant n - 1$.

Esempio 19.3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo se qualcuna fra le entrate a di A è suo autovalore. Per la Proposizione 19.2, si tratta di determinare per quale entrata a di A risulta $\operatorname{rk}(A - aI_2) \leqslant 1$.

Poiché

$$\operatorname{rk}(A - I_2) = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 2, \qquad \operatorname{rk}(A - 2I_2) = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\operatorname{rk}(A - 3I_2) = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = 2, \qquad \operatorname{rk}(A + 4I_2) = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

deduciamo che l'unica entrata di A che sia anche suo autovalore è 2.

Verifichiamo che anche -5 è autovalore di A. Infatti

$$\operatorname{rk}(A + 5I_2) = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$ ♠

☠ Da questo esempio ricaviamo alcune osservazioni. Non è detto che gli autovalori di una matrice vadano cercati fra le entrate della matrice stessa (-5 non è entrata di A). In particolare non è detto che gli autovalori di una matrice siano le sue entrate diagonali della matrice stessa (2 e -5 non sono entrate diagonali di A).

Vedremo in seguito che la ricerca degli autovalori di una matrice o di un endomorfismo è un problema assai più sottile, talvolta difficile o anche impossibile da risolvere in maniera esatta!

Esempio 19.4. Sia $I =]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $D\colon \mathcal{C}^\infty(I) \to \mathcal{C}^\infty(I)$ l'endomorfismo definito nell'Esempio 17.8. Allora $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore se e solo se esiste $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I)$, $\varphi \neq 0$, tale che $D\varphi = \lambda\varphi$.

Dall'analisi sappiamo che ogni funzione $\varphi(x) = \exp(\lambda x)$ soddisfa tale relazione (è un'*autofunzione* di D): in particolare ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di D. Studiando le equazioni differenziali si avrà modo di verificare che $E_D(\lambda) = \mathcal{L}(\exp(\lambda x))$.

Discorsi analoghi si possono applicare ad ogni operatore differenziale lineare della forma

$$P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n \colon \mathcal{C}^\infty(I) \to \mathcal{C}^\infty(I),$$

con $a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{C}^\infty(I)$. ♠

19.2 Autovalori, autovettori e autospazi di matrici

Restringiamoci ora allo studio degli autovalori, autovettori e autospazi di endomorfismi di spazi di dimensione finita. In tal caso è sufficiente limitarsi a determinare gli autovalori, autovettori, autospazi della corrispondente matrice rispetto ad un'opportuna base: per tale motivo d'ora innanzi ci limiteremo al caso di matrici.

Siano $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $A \in K^{n,n}$: abbiamo visto che un autovalore di A è uno scalare $\lambda \in K$ tale che $\operatorname{rk}(A - \lambda I_n) \leqslant n-1$ o, equivalentemente, un elemento $\lambda \in K$ tale che $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Sviluppando tale determinante con la regola di Laplace, si può verificare facilmente che

$$p_A(t) = \det(A - tI_n) = (-1)^n t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \cdots + a_{n-1} t + a_n$$

è un polinomio di grado esattamente n, dove i coefficienti a_i sono polinomi nelle entrate di A: in particolare $p_A(t) \in K[t]$.

Ricordiamo che ogni polinomio di grado n a coefficienti in $\mathbb{C}$ può essere fattorizzato in un prodotto di n polinomi di grado 1, cioè

$$p_A(t) = (-1)^n (t - \lambda_1) \cdot \cdots \cdot (t - \lambda_n),$$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono le radici in $\mathbb{C}$, non necessariamente distinte, del polinomio $p_A(t)$.

Esistono vari legami tra i coefficienti a_i e le radici λ_j. Per esempio il termine noto a_n di $p_A(t)$ è esattamente il prodotto di $(-1)^n$ per il prodotto dei termini noti dei binomi $t - \lambda_j$: d'altra parte $a_n = p_A(0) = \det(A - 0I_n) = \det(A)$, quindi

$$\det(A) = p_A(0) = a_n = \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n.$$

Invece il coefficiente a_1 di t^{n-1} è esattamente il prodotto di $(-1)^{n+1}$ per la somma dei termini noti dei binomi $t - \lambda_j$: d'altra parte, sviluppando il determinante, ci si rende conto che tale coefficiente è anche il prodotto di $(-1)^{n-1}$ per la somma $Tr(A)$ delle entrate diagonali di A (tale somma viene detta *traccia di* A) cioè

$$(-1)^{n-1} Tr(A) = a_1 = (-1)^{n+1} \lambda_1 + \cdots + \lambda_n,$$

da cui segue

$$Tr(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

Definizione 19.5 (Polinomio caratteristico). Siano $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $A \in K^{n,n}$.

Il polinomio $p_A(t) = \det(A - tI_n)$ è chiamato *polinomio caratteristico di* A. L'equazione $p_A(t) = 0$ è detta *equazione caratteristica di* A.

Proposizione 19.6. *Siano* $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *e* $A \in K^{n,n}$. *Allora gli autovalori in* K *di* A *sono le radici in* K *del polinomio caratteristico di* A. *In particolare* A *ha al più* n *autovalori.*

Da quanto visto sopra deduciamo che, se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con n dispari, essa ha almeno un autovalore in $\mathbb{R}$. Invece se $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ogni radice del suo polinomio caratteristico è autovalore di A su $\mathbb{C}$.

Esempio 19.7. Gli autovalori dipendono non solo dall'endomorfismo, ma anche dal campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Si consideri ad esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \subseteq \mathbb{C}^{2,2}.$$

Gli autovalori di A sono le radici di

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + 1.$$

In particolare A non ha autovalori in $\mathbb{R}$, mentre ha autovalori $\pm i \in \mathbb{C}$ come matrice su $\mathbb{C}$. Per calcolare l'autospazio $E_A(i) \subseteq \mathbb{C}^2$ dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

quindi $E_A(i) = \mathcal{L}((1, i))$. Similmente, per determinare l'autospazio $E_A(-i) \subseteq \mathbb{C}^2$ si deve risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

quindi $E_A(-i) = \mathcal{L}((i, -i))$. ♠

Esempio 19.8. Ritorniamo all'Esempio 19.3: gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

sono le radici (in $\mathbb{R}$) del polinomio

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & -4-t \end{vmatrix} = t^2 + 3t - 10 = (t-2)(t+5),$$

quindi 2 e -5. Per calcolare l'autospazio $E_A(2) \subseteq \mathbb{R}^2$ dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

quindi $E_A(2) = \mathcal{L}((2, 1))$. Similmente, per determinare l'autospazio $E_A(-5) \subseteq \mathbb{R}^2$ si deve risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

quindi $E_A(-5) = \mathcal{L}((1, -3))$. ♠

Esempio 19.9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Gli autovalori di A sono le radici (in $\mathbb{R}$) del polinomio

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} -1-t & 2 & 2 \\ 1 & -2-t & 1 \\ 3 & 3 & -t \end{vmatrix} = -(t+3)^2(t-3),$$

cioè ± 3. Per calcolare l'autospazio $E_A(3)$ risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

quindi $E_A(3) = \mathcal{L}((2,1,3)) \subseteq \mathbb{R}^3$. Similmente, per determinare l'autospazio $E_A(-3)$ risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

quindi $E_A(-3) = \mathcal{L}((-1,1,0),(-1,0,1)) \subseteq \mathbb{R}^3$. ♠

Esempio 19.10. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

che ha polinomio caratteristico

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ -1 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = -(t-1)^2(t-2).$$

Gli autovalori di A sono 1 e 2: calcoliamone gli autospazi relativi. Per $E_A(1)$ risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

il cui spazio delle soluzioni è $E_A(1) = \mathcal{L}((0,1,0)) \subseteq \mathbb{R}^3$. Similmente, calcoliamo $E_A(2)$ a partire dal sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

il suo spazio delle soluzioni è $E_A(2) = \mathcal{L}((1,1,0)) \subseteq \mathbb{R}^3$. ♠

Esempio 19.11. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

che ha polinomio caratteristico

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 0 & 1-t & 1 \\ -1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = -t(t^2 - 4t + 5).$$

La matrice A ha un unico autovalore in $\mathbb{R}$. Calcoliamo il corrispondente autospazio $E_A(0) = \operatorname{Ker}(\mu_A)$: a tale scopo risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

il cui spazio delle soluzioni è $E_A(0) = \mathcal{L}(2, -1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$. ♠

Si noti che in tutti i casi sopra esaminati la dimensione di un certo autospazio $E_A(\lambda)$ è limitata dalla molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico $p_A(t)$, ma non è necessariamente uguale ad essa.

Definizione 19.12 (Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica). Siano $A \in K^{n,n}$ una matrice, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, e $\lambda \in K$ un suo autovalore.

- La *molteplicità algebrica* di λ è la sua molteplicità come radice di $p_A(t)$ e si denota $m_a(\lambda, A)$.
- La *molteplicità geometrica* di λ è il numero $m_g(\lambda, A) = \dim_K(E_A(\lambda))$.

Osserviamo che, in base a quanto visto nella Lezione 18, si ha

$$m_g(\lambda, A) = n - \operatorname{rk}(A - \lambda I_n).$$

Inoltre per definizione $m_g(\lambda, A) \geqslant 1$. Il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione, mette in relazione le due nozioni di molteplicità.

Proposizione 19.13. *Sia $A \in K^{n,n}$ una matrice, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, e $\lambda \in K$ un suo autovalore. Allora $1 \leqslant m_g(\lambda, A) \leqslant m_a(\lambda, A)$.*

Concludiamo la lezione con la definizione di spettro di un endomorfismo.

Definizione 19.14 (Spettro di un endomorfismo). Sia V uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, non necessariamente di dimensione finita.

Se $f \colon V \to V$ è un endomorfismo si definisce *spettro* di f su K l'insieme

$$\operatorname{Sp}_K(f) = \{ \lambda \in K \mid f - \lambda id_V \text{ non è invertibile} \}.$$

Se V è finitamente generato, in forza di quanto visto finora, l'insieme $\mathrm{Sp}_K(f)$ coincide esattamente con l'insieme degli autovalori di f. Ciò non è più vero se V non è finitamente generato, come mostra il seguente esempio.

Esempio 19.15. Sia $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} f\colon K[x] &\longrightarrow K[x] \\ p(x) &\mapsto xp(x). \end{aligned}$$

Risulta che

$$(f - \lambda id_V)(p(x)) = f(p(x)) - \lambda p(x) = xp(x) - \lambda p(x) = (x - \lambda)p(x),$$

che è iniettiva per ogni $\lambda \in K$: concludiamo che f non ha autovalori.

D'altra parte $\mathrm{Sp}_K(f) = K$ poiché $f - \lambda id_V$ non è mai suriettiva: infatti in $\mathrm{Im}(f - \lambda id_V)$ non ci sono polinomi di grado 0. ♠