Esercizio 4. Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ associato alla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che f è diagonalizzabile e determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^3$ composta da autovettori di f.
(2) Verificare che f è un isomorfismo e determinare f^{-1}. Determinare autovalori ed autospazi di f^{-1}.

Svolgimento. Procediamo come negli esercizi 1 e 2.

$$p_f(t) = \begin{vmatrix} t & 0 & -i \\ 0 & t-1 & 0 \\ -i & 0 & t \end{vmatrix} = (t-1)(t-i)(t+i).$$

Poiché abbiamo tre radici ciascuna con molteplicità 1, precisamente 1, $-i$ ed i, segue che f è semplice (ed A è diagonalizzabile). Per determinare la basa $\mathcal{B}$ dobbiamo andare a risolvere i sistemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -i & 0 & -i \\ 0 & -3 & 0 \\ -i & 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto gli autospazi di f sono

$$E_f(1) = \mathcal{L}((0,1,0)), \quad E_f(-i) = \mathcal{L}((1,0,1)), \quad E_f(i) = \mathcal{L}((1,0,-1)),$$

dunque $\mathcal{B} := ((0,1,0),(1,0,1),(1,0,-1))$.

È noto in generale che se $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ è lineare allora f è isomorfismo se e solo $\mathrm{rk}(M(f)) = n = m$. Nel nostro caso si vede facilmente che $\varrho(A) = 3$.

Inoltre è noto in generale che $M(f)^{-1} = M(f^{-1})$. Quindi nel nostro caso f^{-1} è l'applicazione lineare associata alla matrice

$$B := A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di f^{-1} sono $t_1 := 1 = 1/1$, $t_2 := i = 1/-i$, $t_3 := -i = 1/i$. Gli autospazi relativi sono $E_{f^{-1}}(1) := \mathcal{L}((0,1,0))$, $E_{f^{-1}}(i) := \mathcal{L}((1,0,1))$, $E_{f^{-1}}(-i) = \mathcal{L}((1,0,-1))$.

Infatti $f(v) = \lambda v$ se e solo se $v = f^{-1}(f(v)) = f^{-1}(\lambda v) = \lambda f^{-1}(v)$ cioè se e solo se $f^{-1}(v) = \lambda^{-1}v$.

Esercizio 5. Determinare $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ avente autovalori $0, 2$ e tale che $f(1,0) = (2,4)$.

Svolgimento. f ha due autovettori linearmente indipendenti, diciamo v_1 con autovalore 0 e v_2 con autovalore 2. Inoltre esistono costanti univocamente determinate $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha v_1 + \beta v_2 = (1,0)$. Sia $w_1 := \alpha v_1 = (a,b)$ e $w_2 := \beta v_2 = (c,d)$. Allora

$$(2,4) = f(1,0) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) = f(\alpha v_1) + f(\beta v_2) = 0 + 2\beta v_2 = 2w_2,$$