

# Esami scritti di Analisi Matematica I 2014 - 2015

1	Esame del 30 gennaio 2015 . . . . .	2
2	Esame del 13 febbraio 2015 - I <sup>o</sup> turno . . . . .	6
3	Esame del 13 febbraio 2015 - II <sup>o</sup> turno . . . . .	9
4	Esame del 17 giugno 2015 . . . . .	13
5	Esame del 9 settembre 2015 . . . . .	16

# 1 Esame del 30 gennaio 2015

**Esercizio 1.** Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \log|x+3|.$$

1. Determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti..
  2. Calcolarne la derivata di  $f$ , determinarne gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e di minimo.
  3. Determinarne gli eventuali punti di flesso e gli intervalli di concavità e convessità.
  4. Disegnarne un grafico qualitativo.
  5. Dire se la funzione  $g(x) = \arctan f(x)$  è prolungabile per continuità in  $x = -3$ , motivando la risposta.
- 

**Esercizio 2.**

- a) Enunciare il Teorema di Rolle.
  - b) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$ , tale che l'equazione  $f(x) = 5x + 13$  abbia almeno tre soluzioni reali distinte. Dimostrare che esiste almeno un punto  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $f''(c) = 0$ .
  - c) Illustrare questo risultato con un grafico qualitativo.
-

## SVOLGIMENTO

### Esercizio 1.

1. Imponendo che l'argomento del logaritmo sia positivo, si ottiene  $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ . Agli estremi del dominio si ha che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2}x^2 + x + \log|x+3| \right) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2}x^2 + x + \log|x+3| \right) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty.$$

Quindi, la retta  $x = -3$  è un asintoto verticale (completo) della funzione.

Poiché  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$  per  $x \rightarrow +\infty$  e  $x \rightarrow -\infty$ , la funzione non ammette asintoti obliqui.

2. Per ogni  $x \neq -3$  si ha che

$$f'(x) = x + 1 + \frac{1}{x+3} = \frac{(x+2)^2}{x+3}.$$

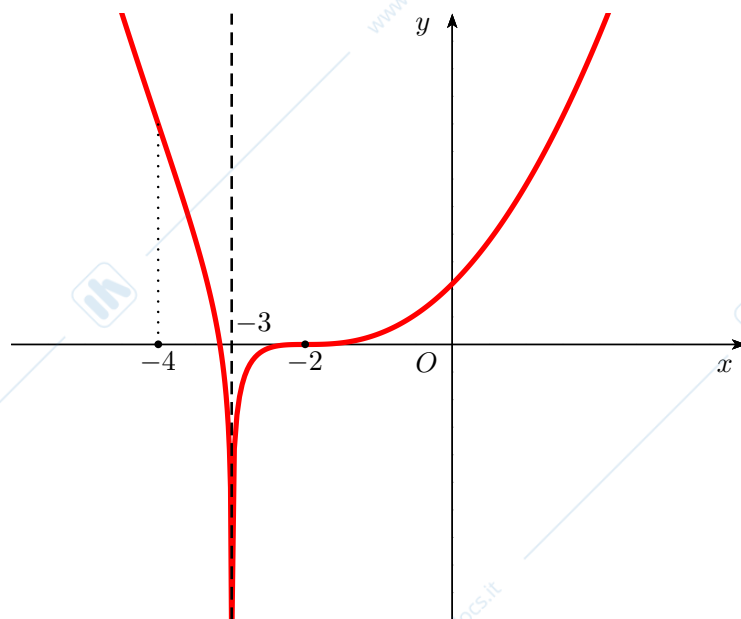
Ne segue che  $f'(x) > 0 \iff x > -3$  e  $f'(x) = 0 \iff x = -2$ , da cui si conclude che  $f$  decresce strettamente in  $(-\infty, -3)$  e cresce strettamente in  $(-3, +\infty)$ .

I punti di estremo di una funzione continua vanno cercati tra i punti stazionari, gli eventuali punti di non derivabilità della funzione e gli estremi del dominio. L'unico punto stazionario di  $f$  è  $x = -2$  e non esistono punti di non derivabilità. Dal segno della derivata prima si deduce che  $x = -2$  non è un punto di estremo. Inoltre, dal punto 1., la funzione è inferiormente e superiormente illimitata, ne concludiamo che  $f$  non ammette punti di massimo/minimo relativi o assoluti.

3. Per ogni  $x \neq -3$  si ha che

$$f''(x) = \frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}.$$

Ne segue che  $f''(x) \geq 0 \iff x \leq -4$  o  $x \geq -2$ , e quindi  $f$  è convessa in  $(-\infty, -4]$  e  $[-2, +\infty)$ , concava in  $[-4, -3)$  e  $(-3, -2]$ . In particolare,  $x = -4$  è un punto di flesso discendente e  $x = -2$  è un punto di flesso a tangente orizzontale ascendente.



4. Essendo  $f$  continua in  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ,  $g$  è continua in  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ . Poiché  $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = -\frac{\pi}{2}$ , si ha che  $x = -3$  è un punto di discontinuità eliminabile per  $g$ . Quindi,  $g$  risulta essere prolungabile per continuità in  $x = -3$  e il prolungamento per continuità di  $g$  è definito come segue

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq -3 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = -3. \end{cases}$$

### Esercizio 2.

a) **Teorema di Rolle.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Supponiamo che:

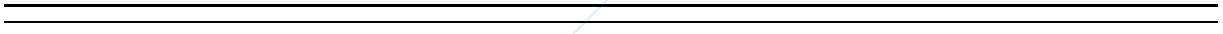
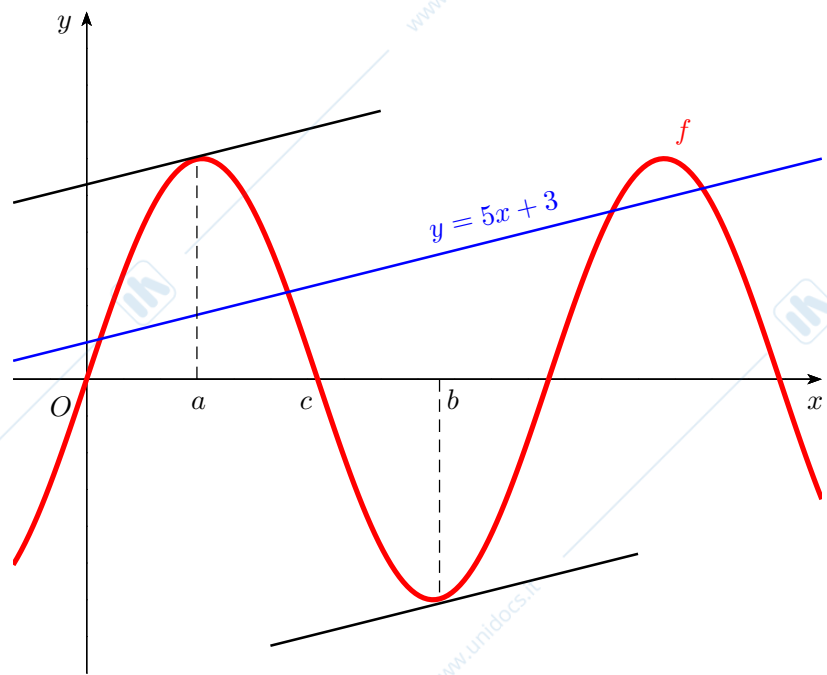
- $f$  sia continua in  $[a, b]$ ;
- $f$  sia derivabile in  $(a, b)$ ;
- $f(a) = f(b)$ .

Allora esiste  $x_0 \in (a, b)$  tale che  $f'(x_0) = 0$ .

- b) Consideriamo la funzione ausiliaria  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $h(x) := f(x) - 5x - 13$ . Per ipotesi,  $h$  è di classe  $C^2$  ed esistono  $x_1 < x_2 < x_3$  tali che  $h(x_1) = h(x_2) = h(x_3) = 0$ . Applicando il Teorema di Rolle ad  $h$  negli intervalli  $[x_1, x_2]$  e  $[x_2, x_3]$ , si deduce che esistono  $a \in (x_1, x_2)$  e  $b \in (x_2, x_3)$  tali che  $h'(a) = h'(b) = 0$ .

Possiamo allora applicare il Teorema di Rolle alla funzione  $h'$  che è di classe  $C^1$  sull'intervallo  $[a, b]$ , da cui segue che esiste  $c \in (a, b)$  tale che  $h''(c) = 0$ . Essendo  $h''(x) = f''(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , segue che  $f''(c) = 0$ .

- c) Con le stesse notazioni del punto b), si ha  $h'(x) = f'(x) - 5$ . Quindi,  $f'(a) = f'(b) = 5$ , dove 5 è anche il coefficiente angolare della retta  $y = 5x + 13$ . Per l'interpretazione geometrica, si veda il grafico sotto.



## 2 Esame del 13 febbraio 2015 - I° turno

**Esercizio 1.** Sia

$$f(x) = e^{-|(x-4)(x+1)|}.$$

1. Determinare il dominio di  $f$  e i limiti agli estremi del dominio.
2. Calcolare la derivata di  $f$ , specificando gli eventuali punti di non derivabilità.
3. Determinarne gli intervalli di monotonia di  $f$  e i suoi punti di massimo e di minimo.
4. Disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .
5. Dire quante soluzioni ha l'equazione

$$e^{-|(x-4)(x+1)|} = e^{-25/4}.$$

---

**Esercizio 2.** Sia

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{10} - \frac{3}{1+x^2} & \text{se } x \leq 3 \\ 2(x \log 3 - x \log x) & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

1. Calcolare  $\int_0^6 g(x) dx$ .
  2. Dire se esiste  $c \in [0, 6]$  tale che  $g(c)$  è uguale alla media integrale di  $g$  su  $[0, 6]$ . Giustificarne la risposta.
-

## SVOLGIMENTO

**Esercizio 1.** Consideriamo la funzione

$$f(x) = e^{-|(x-4)(x+1)|}.$$

1. Risulta che  $f = h \circ g$ , dove

$$g(x) = |(x-4)(x+1)|, \quad h(y) = e^{-y}.$$

Poiché  $g$  e  $h$  sono definite su  $\mathbb{R}$ , anche  $f$  è definita su  $\mathbb{R}$ . Quindi  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ . Inoltre, essendo  $g$  e  $h$  continue su  $\mathbb{R}$ , anche  $f$  lo è. Ne segue che  $f$  non ha asintoti verticali.

Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Quindi la retta  $y = 0$  è un asintoto orizzontale completo per  $f$ .

2. La funzione  $h$  è derivabile ovunque mentre la funzione  $g$  è certamente derivabile in ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq -1, 4$ . Ne segue che  $f$  è derivabile in ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq -1, 4$ . Essendo

$$f(x) = e^{-|(x-4)(x+1)|} = \begin{cases} e^{-(x-4)(x+1)} & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 4 \\ e^{(x-4)(x+1)} & \text{se } -1 < x < 4, \end{cases}$$

si ha che

$$f'(x) = \begin{cases} (3 - 2x) e^{-(x-4)(x+1)} & \text{se } x < -1 \vee x > 4 \\ (2x - 3) e^{(x-4)(x+1)} & \text{se } -1 < x < 4. \end{cases}$$

Esaminiamo la derivabilità di  $f$  in  $x = -1$  e  $x = 4$ . Si ha che

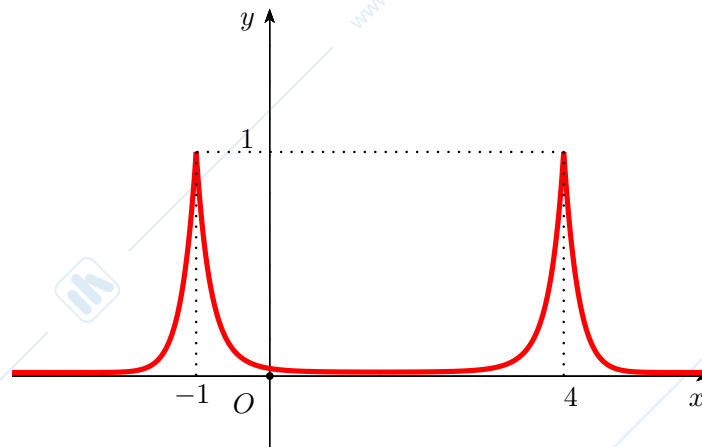
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = 5 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = -5,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = 5 \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) = -5.$$

Ne segue che i punti  $x = -1$  e  $x = 4$  sono punti di non derivabilità per  $f$  e in particolare sono punti angolosi.

3. Risulta che  $f'(x) = 0$  se e solo se  $x = \frac{3}{2}$ ;  $f'(x) > 0$  per  $x < -1$  e  $\frac{3}{2} < x < 4$ , e  $f'(x) < 0$  per  $-1 < x < \frac{3}{2}$  e  $x > 4$ . Quindi  $f$  è strettamente crescente negli intervalli  $(-\infty, -1]$  e  $[\frac{3}{2}, 4]$ , ed è strettamente decrescente negli intervalli  $[-1, \frac{3}{2}]$  e  $[4, +\infty)$ . Il punto  $x = \frac{3}{2}$  è di minimo locale per  $f$ . Inoltre i punti  $x = -1$  e  $x = 4$  sono entrambi di massimo assoluto per  $f$  e il massimo assoluto di  $f$  è  $f(-1) = f(4) = 1$ .

4. Il grafico qualitativo di  $f$  è:



5. Osserviamo che  $\text{im}(f) = (0, 1]$ . Poiché  $0 < e^{-25/4} < 1$ , l'equazione  $e^{-|(x-4)(x+1)|} = e^{-25/4}$  ha 4 soluzioni.

**Esercizio 2.** Consideriamo la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{10} - \frac{3}{1+x^2} & \text{se } x \leq 3 \\ 2(x \log 3 - x \log x) & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

1. Si ha che

$$\begin{aligned} \int_0^6 g(x) dx &= \int_0^3 \left( \frac{3}{10} - \frac{3}{1+x^2} \right) dx + \int_3^6 2(x \log 3 - x \log x) dx = \\ &= \left[ \frac{3}{10}x - 3 \arctan x \right]_0^3 + \int_3^6 2x \log 3 dx - \int_3^6 2x \log x dx = \end{aligned}$$

integrando per parti l'ultimo integrale si ottiene

$$\begin{aligned} &= \frac{9}{10} - 3 \arctan 3 + \log 3 \left[ x^2 \right]_3^6 - \left[ x^2 \log x \right]_3^6 + \int_3^6 x dx = \\ &= \frac{9}{10} - 3 \arctan 3 + 27 \log 3 - 36 \log 6 + 9 \log 3 + \frac{27}{2} = \\ &= \frac{72}{5} - 3 \arctan 3 - 36 \log 2. \end{aligned}$$

2. La funzione  $g$  è continua in ogni  $x \neq 3$ . Controlliamo in  $x = 3$ . Si ha che

$$g(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x).$$

Quindi  $g$  è continua anche in  $x = 3$ . In particolare  $g$  è continua in  $[0, 6]$ . Per il Teorema della media integrale esiste  $c \in [0, 6]$  tale che  $g(c)$  è uguale alla media integrale di  $g$  su  $[0, 6]$ .

### 3 Esame del 13 febbraio 2015 - II<sup>o</sup> turno

**Esercizio 1.** Sia

$$f(x) = |\log(x-2) - \log^2(x-2)|.$$

1. Determinare il dominio di  $f$  e i limiti agli estremi del dominio.
  2. Calcolare la derivata di  $f$ , specificando gli eventuali punti di non derivabilità.
  3. Determinare gli intervalli di monotonia di  $f$  e i suoi punti di massimo e di minimo.
  4. Disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .
- 

**Esercizio 2 (Variante 1).**

- a) Sia  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Scrivere la definizione di convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

- b) Dimostrare che se  $f(x) \geq 0$  su  $[0, +\infty)$ , l'integrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  non può essere indeterminato.

- c) Studiare il comportamento dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + 1} dx.$$


---

**Esercizio 2 (Variante 2).** Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua tale che  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ .

1. Scrivere la definizione di convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

2. Dimostrare che se  $f(x) \geq 0$  su  $(0, 1)$ , allora l'integrale  $\int_0^1 f(x) dx$  non può essere indeterminato.

3. Studiare il comportamento dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sin(x-1)}{(x-1)^2} dx.$$


---

## SVOLGIMENTO

### Esercizio 1.

1. Posto  $g(x) = \log(x-2)$  per  $x \in (2, +\infty)$  e  $h(y) = |y - y^2|$  per  $y \in \mathbb{R}$ , risulta  $f(x) = h(g(x))$ .

In particolare, il dominio di  $f$  coincide con quello di  $g$ ; ne segue che  $\text{dom } f = (2, +\infty)$ . Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} h(y) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} h(y) = +\infty.$$

Dunque  $x = 2$  è un asintoto verticale destro mentre essendo  $f$ , per  $x \rightarrow +\infty$ , un infinito di ordine minore di 1 rispetto a  $x$ , non esiste asintoto obliquo per  $x \rightarrow +\infty$ .

2. Osserviamo che  $f$  è continua perché composizione di funzioni continue. Si ha che

$$f(x) = \begin{cases} \log(x-2) - \log^2(x-2) & 3 \leq x \leq 2+e \\ \log^2(x-2) - \log(x-2) & 2 < x < 3 \text{ o } x > 2+e. \end{cases}$$

Per ogni  $x \in \text{dom } f \setminus \{3, 2+e\}$  si ha che

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1 - 2\log(x-2)}{x-2} & 3 < x < 2+e \\ \frac{2\log(x-2) - 1}{x-2} & 2 < x < 3 \vee x > 2+e. \end{cases}$$

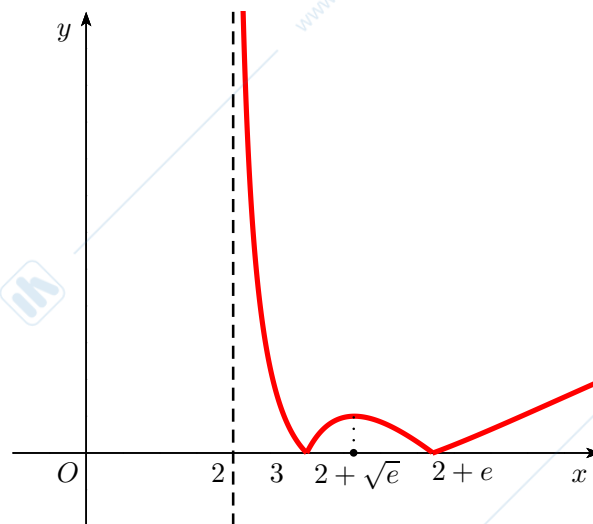
Poiché  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow (2+e)^-} f'(x) = \frac{-1}{e} \neq \lim_{x \rightarrow (2+e)^+} f'(x) = \frac{1}{e}$ , si conclude che  $x = 3$  e  $x = 2+e$  sono punti angolosi per  $f$ .

3. Si ha che  $f'(x) = 0 \iff x = 2 + \sqrt{e}$ , mentre  $f'(x) > 0 \iff 3 < x < 2 + \sqrt{e} \vee x > 2+e$ . Quindi  $x = 2 + \sqrt{e}$  è l'unico punto stazionario per  $f$ ; inoltre  $f$  è strettamente crescente in  $[3, 2 + \sqrt{e}]$  e  $[2+e, +\infty)$ ,  $f$  è strettamente decrescente in  $(2, 3]$  e  $[2 + \sqrt{e}, 2+e]$ .

I punti di estremo di una funzione continua vanno cercati tra i punti stazionari, gli eventuali punti di non derivabilità della funzione e gli estremi del dominio.

Per quanto sopra osservato, si conclude che  $x = 3$  e  $x = 2+e$  sono punti di minimo relativo mentre  $x = 2 + \sqrt{e}$  è un punto di massimo relativo. Dal momento che  $f$  è superiormente illimitata non esiste massimo assoluto, essendo  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \text{dom } f$  e  $f(3) = f(2+e) = 0$ , se ne conclude che  $x = 3$  e  $x = 2+e$  sono punti di minimo assoluto.

4. Di seguito viene riportato un grafico qualitativo di  $f$ .



### Esercizio 2 (Variante 1).

a) Per definizione l'integrale improprio  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge se esiste finito il limite

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c f(x) dx.$$

b) Consideriamo la funzione  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$F(c) = \int_0^c f(x) dx.$$

Essendo  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \geq 0$ , risulta che  $F$  è crescente. Infatti, se  $0 \leq c_1 < c_2$ , allora

$$F(c_2) = \int_0^{c_2} f(x) dx = \underbrace{\int_0^{c_1} f(x) dx}_{=F(c_1)} + \underbrace{\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx}_{\geq 0} \geq F(c_1) \geq 0.$$

Per il Teorema sui limiti delle funzioni monotone esiste  $\lim_{c \rightarrow +\infty} F(c)$  che quindi è un numero reale  $\geq 0$  oppure è  $+\infty$ . Ne segue che l'integrale improprio di  $f$  tra  $a$  e  $+\infty$  converge o diverge positivamente.

c) La funzione  $f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + 1}$  è continua su  $[0, +\infty)$  e quindi è localmente integrabile su  $[0, +\infty)$ .

Osserviamo che

$$\forall x \geq 0 : \quad \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + 1}$$

e

$$\forall x \geq 1 : \quad \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \geq 0.$$

Inoltre  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$ . Ne segue che  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$  diverge, e per il criterio del confronto anche  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + 1} dx$  diverge.

**Esercizio 2 (Variante 2).** Consideriamo la funzione

1. Per definizione l'integrale improprio  $\int_0^1 f(x) dx$  converge se esiste finito il limite

$$\lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c f(x) dx.$$

2. La funzione  $F : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$F(c) = \int_0^c f(x) dx$$

è la funzione integrale di  $f$  sull'intervallo  $[0, 1)$ . Poiché  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in [0, 1)$ ,  $F$  è monotona crescente su  $[0, 1)$ . Per il Teorema sui limiti delle funzioni monotone, esiste  $\lim_{c \rightarrow 1^-} F(c)$ . Perciò l'integrale improprio  $\int_0^1 f(x) dx$  non può essere indeterminato.

3. Se  $x \in [0, 1)$ , allora  $x - 1 \in [-1, 0)$ . Dunque  $\frac{\sin(x-1)}{(x-1)^2} \leq 0$  per ogni  $x \in [0, 1)$ . Quindi l'integrale improprio  $\int_0^1 \frac{\sin(x-1)}{(x-1)^2} dx$  converge o diverge negativamente.

Poiché la funzione seno è dispari, osserviamo che

$$\frac{\sin(x-1)}{(x-1)^2} = -\frac{\sin(1-x)}{(x-1)^2} \sim -\frac{1}{x-1}, \quad x \rightarrow 1.$$

Poiché l'integrale improprio  $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$  diverge, per il criterio del confronto asintotico anche l'integrale improprio  $\int_0^1 \frac{\sin(1-x)}{(1-x)^2} dx$  diverge positivamente. Quindi l'integrale improprio  $\int_0^1 \frac{\sin(x-1)}{(x-1)^2} dx$  diverge negativamente.

## 4 Esame del 17 giugno 2015

**Esercizio 1.** Sia data la funzione

$$f(x) = x e^{\frac{1}{\log 2x}}.$$

- Determinarne il dominio e i limiti agli estremi del dominio.
  - Determinarne gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo.
  - Disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .
  - Trovare un prolungamento continuo di  $f$  su  $(-\infty, \frac{1}{2}]$ . Dire inoltre se esiste un prolungamento continuo di  $f$  a  $\mathbb{R}$ , motivando la risposta.
- 

**Esercizio 2.**

- Date due funzioni  $a, b$  definite su  $\mathbb{R}$ , formulare la definizione di soluzione di un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t)b(y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

- Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{t}(3e^y)\log t \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

---

## SVOLGIMENTO

## Esercizio 1.

$$a) \text{ dom } f = (0, 1/2) \cup (1/2, +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow (1/2)^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow (1/2)^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Non esiste asintoto obliquo a  $+\infty$ . Infatti, per  $x \rightarrow +\infty$  si ha che

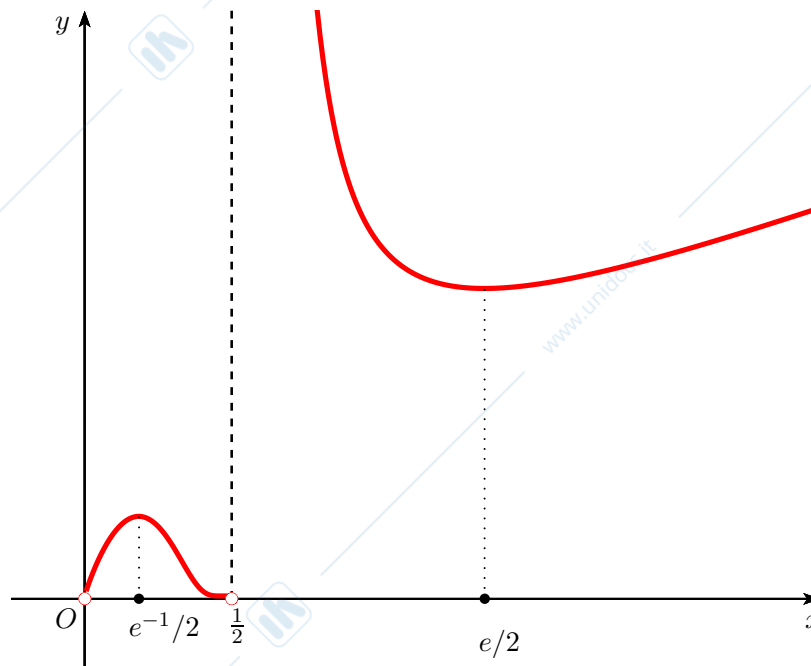
$$f(x) = x e^{\frac{1}{\log 2x}} = x \left[ 1 + \frac{1}{\log 2x} + o\left(\frac{1}{\log 2x}\right) \right] = x + \frac{x}{\log 2x} + o\left(\frac{x}{\log 2x}\right) \neq x + o(1).$$

b) Si ha che

$$f'(x) = e^{\frac{1}{\log 2x}} \left( 1 - \frac{1}{(\log 2x)^2} \right).$$

Quindi  $f'(x) \geq 0 \iff (\log 2x)^2 - 1 \geq 0 \iff 0 < x \leq e^{-1/2} \vee x \geq e/2$ . Ne segue che  $f$  è crescente in  $(0, e^{-1/2}]$  e in  $[e/2, +\infty)$ , è decrescente in  $[e^{-1/2}, 1/2)$  e in  $(1/2, e/2]$ ;  $x = e^{-1/2}$  è un punto di massimo relativo e  $x = e/2$  è un punto di minimo relativo. Non esistono massimi e minimi assoluti perché  $f$  è superiormente illimitata e  $\inf f = 0$  non è assunto in nessun punto del dominio.

c) Sotto viene riportato un grafico qualitativo di  $f$ .



d) Un prolungamento continuo di  $f$  su  $(-\infty, \frac{1}{2}]$  è

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, 1/2) \\ 0 & x \in (-\infty, 0] \cup \{1/2\}. \end{cases}$$

Essendo  $\lim_{x \rightarrow (1/2)^+} f(x) = +\infty$ , non esiste un prolungamento continuo di  $f$  a  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.**

- a) Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto tale che  $t_0 \in I$ . Diciamo che  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t)b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

se  $y$  è derivabile in  $I$ , per ogni  $t \in I$  risulta  $y'(t) = a(t)b(y)$  e inoltre  $y(t_0) = y_0$ .

- b) L'equazione è a variabili separabili, cioè della forma  $y' = a(t)b(y)$ , con  $a(t) = \frac{1}{t} \log t$  e  $b(y) = 3e^y$ .

Poiché  $b(y) = 3e^y \neq 0$  per ogni  $y \in \mathbb{R}$ , l'equazione non ha soluzioni costanti.

Usando il metodo risolutivo per le equazioni a variabili separabili, posto  $y = y(t)$  si ha

$$\int e^{-y} dy = 3 \int \frac{\log t}{t} dt \iff e^{-y} = -\frac{3}{2} \log^2 t + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

da cui segue che

$$y(t) = -\log \left( -\frac{3}{2} \log^2 t + c \right).$$

Imponendo la condizione iniziale  $y(1) = 0$  nell'espressione ottenuta sopra si ottiene  $c = 1$ , e quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = -\log \left( -\frac{3}{2} \log^2 t + 1 \right).$$

## 5 Esame del 9 settembre 2015

**Esercizio 1.** Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{2(x-3)^3 \log|x-3|}.$$

1. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti di  $f$ . Dimostrare che  $f$  si può prolungare per continuità in  $x = 3$ .
  2. Indicando d'ora in poi con  $f$  la funzione prolungata, calcolarne la derivata prima e studiarne la derivabilità in  $x = 3$ .
  3. Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e di minimo di  $f$ .
  4. Disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .
- 

**Esercizio 2.**

a) Scrivere la definizione di derivata di una funzione  $f$  in un punto  $x_0$  del suo dominio.

b) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3(\sin x)^2 \sin \frac{2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in  $x = 0$ ? Motivare la risposta.

c) Una funzione  $f$  continua su  $\mathbb{R}$ , derivabile in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  e tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \in \mathbb{R}$$

è derivabile in  $x = 0$ ? Motivare la risposta.

---

## SVOLGIMENTO

## Esercizio 1.

1. Si ha:  $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Dunque  $y = 0$  è un asintoto orizzontale sinistro mentre non esistono asintoti obliqui. D'altra parte,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x),$$

dunque non esistono asintoti verticali e  $f$  è prolungabile per continuità in  $x = 3$ . La funzione prolungata (indicata ancora con  $f$  come suggerito dal punto successivo) è

$$f(x) = \begin{cases} e^{2(x-3)^3 \log |x-3|} & \text{se } x \neq 3 \\ 1 & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

2. Si ha che, per ogni  $x \neq 3$

$$f'(x) = 2(x-3)^2(3 \log |x-3| + 1)e^{2(x-3)^3 \log |x-3|}.$$

Dato che  $f$  è continua in  $x = 3$  e che  $\lim_{x \rightarrow 3} f'(x) = 0$ , dal *Teorema del tappabuchi* (corollario del Teorema di de l'Hôpital) segue che  $f$  è derivabile in  $x = 3$  con  $f'(3) = 0$ . Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-3)^2(3 \log |x-3| + 1)e^{2(x-3)^3 \log |x-3|} & \text{se } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

3. Studiamo il segno di  $f'$ :

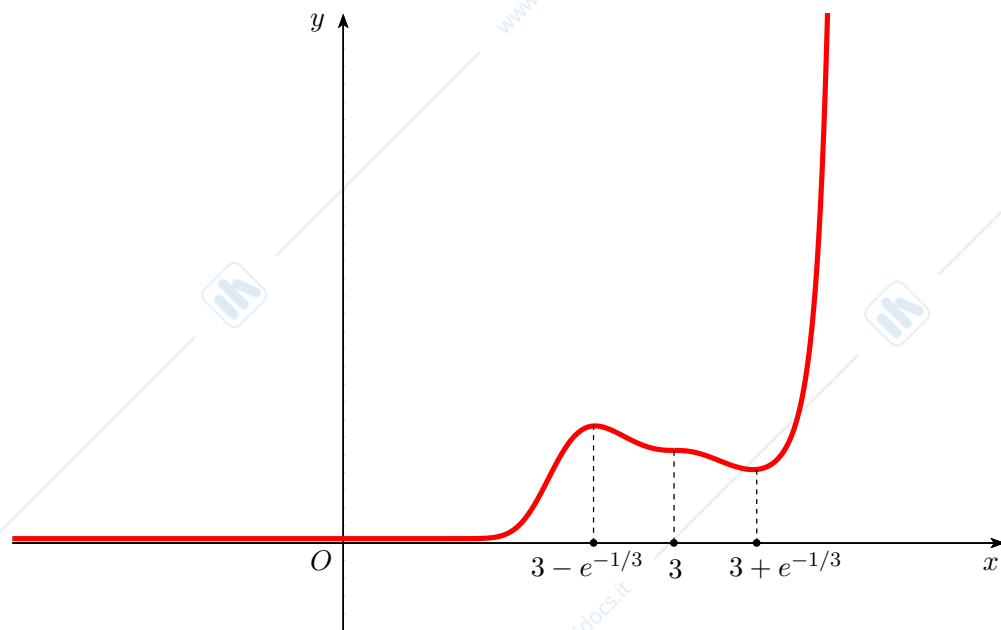
$$f'(x) > 0 \iff 3 \log |x-3| + 1 > 0 \iff x \in (-\infty, 3 - e^{-1/3}) \cup (3 + e^{-1/3}, +\infty).$$

Perciò  $f$  è crescente in  $(-\infty, 3 - e^{-1/3}]$  e in  $[3 + e^{-1/3}, +\infty)$ , decrescente in  $[3 - e^{-1/3}, 3 + e^{-1/3}]$  (qui si utilizza la continuità di  $f$  in  $x/3$ ).

Infine,  $x = 3 - e^{-1/3}$  è un punto di massimo relativo ma non assoluto perché  $f$  è superiormente illimitata, mentre  $x = 3 + e^{-1/3}$  è un punto di minimo relativo ma non assoluto perché  $\inf f = 0 < f(3 + e^{-1/3})$ . In particolare, non esistono punti di massimo o minimo assoluti.

Il punto  $x = 3$  è un punto di flesso discendente a tangente orizzontale.

4. Di seguito viene riportato un grafico qualitativo di  $f$ .



### Esercizio 2.

a) Siano  $f$  una funzione reale e  $x_0$  un punto interno a  $\text{dom} f$ .

Diciamo che  $f$  è derivabile in  $x_0$  se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e in tal caso denotiamo questo limite con  $f'(x_0)$  e lo chiamiamo derivata (prima) di  $f$  in  $x_0$ .

In modo equivalente, diciamo che  $f$  è derivabile in  $x_0$  se esistono  $l \in \mathbb{R}$  e un intorno  $B(x_0)$  di  $x_0$  contenuto in  $\text{dom} f$  tale che

$$\forall x \in B(x_0) : f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0.$$

b) Per definizione

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 x \sin \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \sin \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3x \sin \frac{2}{x} = 0.$$

Quindi  $f$  è derivabile in  $x = 0$  con  $f'(0) = 0$ .

c) L'enunciato proposto è esattamente quanto asserisce il *Teorema del tappabuchi* (corollario del Teorema di De L'Hôpital); si veda il libro di teoria per la dimostrazione.