

# Lezione 20

## 20.1 Diagonalizzazione di matrici

Come visto nella precedente lezione, in generale, data una matrice  $A \in K^{n,n}$  con  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , non è immediato che esista sempre una base costituita da suoi autovettori.

**Definizione 20.1 (Matrici diagonalizzabili).** Siano  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e  $A \in K^{n,n}$ .

La matrice  $A$  si dice *diagonalizzabile su  $K$*  se esistono  $n$  autovettori di  $A$  linearmente indipendenti.

Quando, come spesso accade, il campo su cui si lavora è fissato, si parla semplicemente di matrice diagonalizzabile omettendo l'indicazione del campo.

È chiaro che ogni matrice diagonale  $D$  è diagonalizzabile! Infatti se

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

allora  $De_j = \lambda_j e_j$ , dunque esistono  $n$  autovettori di  $D$  linearmente indipendenti, precisamente  $e_1, \dots, e_n \in K^n$ .

**Esempio 20.2.** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

dell'Esempio 19.9 è diagonalizzabile: infatti in tale esempio abbiamo visto che  $A$  ha due autovalori  $\pm 3$ , con autospazi relativi rispettivamente  $E_A(3) = \mathcal{L}((2, 1, 3)) \subseteq \mathbb{R}^3$  e  $E_A(-3) = \mathcal{L}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)) \subseteq \mathbb{R}^3$ .

Si noti che i vettori  $P_1 = (2, 1, 3)$ ,  $P_2 = (-1, 1, 0)$  e  $P_3 = (-1, 0, 1)$  sono linearmente indipendenti: infatti la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avente tali vettori come righe, ha rango 3. Concludiamo che  $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$  è una base di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori di  $A$ . ♠

Sia  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ; ricordiamo che gli autovalori di una matrice  $A \in K^{n,n}$  sono le radici  $\lambda_1, \dots, \lambda_h \in K$  del polinomio caratteristico  $p_A(t)$ . Inoltre ad ognuno degli autovalori  $\lambda_i \in K$  di  $A$  rimangono associati due numeri interi non negativi, la sua molteplicità algebrica  $m_a(\lambda, A)$  e la sua molteplicità geometrica  $m_g(\lambda, A)$ .

La somma delle molteplicità delle radici di un polinomio è pari al grado del polinomio stesso. Quindi, se  $\lambda_1, \dots, \lambda_h$  sono a due e a due distinti, risulta

$$m_a(\lambda_1, A) + \dots + m_a(\lambda_h, A) \leq n,$$

e, se vale l'uguaglianza, tutte le radici di  $p_A(t)$  devono essere in  $K$ .

Quindi, se  $\lambda_1, \dots, \lambda_h \in K$  sono le radici di  $p_A(t)$ , tenendo conto della Proposizione 19.13, al massimo possiamo determinare

$$m_g(\lambda_1, A) + \dots + m_g(\lambda_h, A) \leq m_a(\lambda_1, A) + \dots + m_a(\lambda_h, A) \leq n$$

autovettori linearmente indipendenti. Se vale l'uguaglianza, tutte le radici  $\lambda$  di  $p_A(t)$  devono essere in  $K$  e si deve avere  $m_g(\lambda, A) = m_a(\lambda, A)$  per ognuna di esse.

In particolare, sia nel caso in cui non tutte le radici di  $p_A(t)$  sono in  $K$ , che nel caso in cui lo sono, ma esiste almeno una di esse per cui  $m_g(\lambda, A) < m_a(\lambda, A)$ , la matrice  $A$  non è diagonalizzabile.

**Esempio 20.3.** Si considerino le matrici di  $\mathbb{R}^{3,3}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nell'Esempio 19.10 abbiamo visto che  $A_1$  ha come autovalori i numeri 1 e 2 e che  $m_a(2, A_1) = 1 = m_g(2, A_1)$ ,  $m_a(1, A_1) = 2 > 1 = m_g(1, A_1)$ .

Nell'Esempio 19.11 abbiamo visto che  $A_2$  ha come unico autovalore in  $\mathbb{R}$  il numero 0 e che  $m_a(0, A_2) = 1 = m_g(0, A_2)$ . Invece su  $\mathbb{C}$  tale matrice ha i numeri 0,  $2+i$  e  $2-i$  come autovalori e  $m_a(0, A_2) = 1 = m_g(0, A_2)$ ,  $m_a(2+i, A_2) = 1 = m_g(2+i, A_2)$ ,  $m_a(2-i, A_2) = 1 = m_g(2-i, A_2)$ .

Concludiamo che  $A_1$  non è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ . Per quanto riguarda  $A_2$ , è evidente che essa non è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ . Se, invece si pensa ad  $A_2$  come matrice a coefficienti complessi, si verifica che  $E_{A_2}(2+i) = \mathcal{L}((2i, i-1, -2))$  ed  $E_{A_2}(2-i) = \mathcal{L}((2i, i+1, 2))$ . Poiché risulta  $E_{A_2}(0) = \mathcal{L}((2, -1, 1))$  e i tre vettori  $(2i, i-1, -2)$ ,  $(2i, i+1, 2)$ ,  $(2, -1, 1)$  sono linearmente indipendenti, segue che  $A_2$ , come matrice a coefficienti in  $\mathbb{C}$ , è diagonalizzabile. ♠

**Proposizione 20.4.** Siano  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e  $A \in K^{n,n}$ . Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_h \in K$  sono autovalori a due a due distinti di  $A$  e  $P_i \in E_A(\lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, h$ , vettori non nulli, allora i  $P_1, \dots, P_h$  sono linearmente indipendenti.

*Dimostrazione.* Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_h \in K$  le radici di  $p_A(t)$  in  $K$  a due a due distinte e siano  $P_i \in E_A(\lambda_i)$ , per  $i = 1, \dots, h$  vettori non nulli. Se ci fosse una relazione di dipendenza lineare tra i vettori  $P_1, \dots, P_h$ , uno di loro sarebbe combinazione lineare di quelli che lo precedono per la Proposizione 14.17, punto (ii).

Sia  $q$  il minimo intero per cui ciò accade: allora  $P_q = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_{q-1} P_{q-1}$  ed almeno uno fra  $\alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}$  deve essere non nullo, altrimenti  $P_q = 0_{n,1}$ . Segue che

$$\begin{aligned} \alpha_1 \lambda_q P_1 + \dots + \alpha_{q-1} \lambda_q P_{q-1} &= \lambda_q (\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_{q-1} P_{q-1}) \\ &= \lambda_q P_q = AP_q \\ &= A(\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_{q-1} P_{q-1}) \\ &= \alpha_1 AP_1 + \dots + \alpha_{q-1} AP_{q-1} = \alpha_1 \lambda_1 P_1 + \dots + \alpha_{q-1} \lambda_{q-1} P_{q-1}, \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\alpha_1 (\lambda_q - \lambda_1) P_1 + \dots + \alpha_{q-1} (\lambda_q - \lambda_{q-1}) P_{q-1} = 0_{n,1}.$$

Poiché, per ipotesi,  $P_1, \dots, P_{q-1}$  sono linearmente indipendenti e  $\lambda_q - \lambda_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, q-1$ , segue che deve essere  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{q-1} = 0$ .  $\square$

Concludiamo questo paragrafo con il seguente risultato fondamentale.

**Proposizione 20.5.** *Siano  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e  $A \in K^{n,n}$ . La matrice  $A$  è diagonalizzabile su  $K$  se e solo se valgono le due seguenti condizioni:*

- (i) tutte le radici di  $p_A(t)$  sono in  $K$ ;
- (ii) per ogni radice  $\lambda \in K$  di  $p_A(t)$ , risulta  $m_a(\lambda, A) = m_g(\lambda, A)$ .

*Dimostrazione.* Se la matrice  $A$  è diagonalizzabile, abbiamo già dimostrato che devono valere le affermazioni (i) ed (ii).

Viceversa, supponiamo che le due condizioni siano verificate. Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_h$  le radici a due a due distinte di  $p_A(t)$  e sia  $(P_{j,1}, \dots, P_{j,m_j})$  una base di  $E_A(\lambda_j)$ , per  $j = 1, \dots, h$  (quindi  $m_j = m_g(\lambda_j, A)$ ). Per ipotesi i vettori vale che

$$m_g(\lambda_1, A) + \dots + m_g(\lambda_h, A) = m_a(\lambda_1, A) + \dots + m_a(\lambda_h, A) = n.$$

Quindi per verificare che

$$\mathcal{B} = (P_{1,1}, \dots, P_{1,m_1}, P_{2,1}, \dots, P_{2,m_2}, \dots, P_{h,m_h})$$

è una base di  $K^n$  basta verificare che tali vettori sono linearmente indipendenti.

Supponiamo per assurdo che esista una relazione di dipendenza lineare fra tali vettori, diciamo

$$\alpha_{1,1} P_{1,1} + \dots + \alpha_{1,m_1} P_{1,m_1} + \alpha_{2,1} P_{2,1} + \dots + \alpha_{2,m_2} P_{2,m_2} + \dots + \alpha_{h,m_h} P_{h,m_h} = 0_{n,1}.$$

Sappiamo che  $\alpha_{j,1} P_{j,1} + \dots + \alpha_{j,m_j} P_{j,m_j} \in E_A(\lambda_j)$  per ogni  $j = 1, \dots, h$ , quindi deduciamo che  $\alpha_{j,1} P_{j,1} + \dots + \alpha_{j,m_j} P_{j,m_j} = 0_{n,1}$ , in contraddizione con il fatto che  $(P_{1,j}, \dots, P_{m_j,j})$  è base di  $E_A(\lambda_j)$ .  $\square$

**Osservazione 20.6.** Chiariamo il motivo per cui si parla di matrici **diagonalizzabili**. Supponiamo che  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e sia  $A \in K^{n,n}$  diagonalizzabile. Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  le radici, non necessariamente distinte, di  $p_A(t)$  (che sono tutte in  $K$  per ipotesi) e  $P_j \in E_A(\lambda_j)$  autovettori linearmente indipendenti di  $A$ . Sia  $P \in K^{n,n}$  la matrice avente  $P_j$  come  $j$ -esima colonna: allora

$$AP_j = \lambda_j P_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Quindi  $AP = PD$  ove  $D$  è la matrice diagonale avente nell'ordine  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  come entrate diagonali. Per costruzione  $P$  è invertibile. Concludiamo che se  $A \in K^{n,n}$  è diagonalizzabile allora esiste  $P \in K^{n,n}$  invertibile tale che  $P^{-1}AP = D$  sia diagonale.

Viceversa, se ciò accade, procedendo a ritroso con il ragionamento sopra, si verifica che  $A$  è diagonalizzabile, che  $P$  ha per colonne  $n$  autovettori di  $A$  linearmente indipendenti e che l'elemento  $j$ -esimo sulla diagonale di  $D$  è esattamente l'autovalore corrispondente alla colonna  $j$ -esima di  $P$ .

⚠ Quindi le matrici diagonalizzabili sono tutte e sole le matrici  $A \in K^{n,n}$  per cui esiste  $P \in K^{n,n}$  invertibile tale che  $P^{-1}AP$  sia diagonale.

Una definizione importante in algebra lineare è la seguente.

**Definizione 20.7 (Matrici simili).** Siano  $A, B \in K^{n,n}$  due matrici.

La matrice  $A$  si dice *simile* a  $B$ , e si scrive  $A \sim B$ , se esiste  $P \in K^{n,n}$  invertibile tale che  $P^{-1}AP = B$ .

⚠ In base alla definizione sopra, segue che una matrice  $A \in K^{n,n}$  è diagonalizzabile su  $K$  se e solo se è simile ad una matrice diagonale in  $K$ .

**Esempio 20.8.** Riprendiamo la matrice  $A$  dell'Esempio 19.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

Come visto nell'Esempio 19.8, i suoi autovalori sono 2 e  $-5$  e  $E_A(2) = \mathcal{L}((2, 1))$ ,  $E_A(-5) = \mathcal{L}((1, -3))$ .

Consideriamo adesso la matrice

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix};$$

essa è invertibile e  $AP_1 = P_1D$ , ovvero  $P_1^{-1}AP_1 = D$ , con

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Allo stesso risultato saremmo arrivati prendendo in luogo della matrice  $P_1$  sopra indicata la matrice

$$P_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Invece presa

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

risulta

$$P_3^{-1}AP_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \spadesuit$$

**Esempio 20.9.** Riprendiamo la matrice  $A$  dell'Esempio 19.9

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Abbiamo visto che i suoi autovalori sono  $\pm 3$  e che gli autospazi relativi sono rispettivamente  $E_A(3) = \mathcal{L}((2, 1, 3))$  e  $E_A(-3) = \mathcal{L}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ .

Consideriamo adesso le tre matrici

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Per  $i = 1, 2, 3$ , le matrici  $P_i$  sono invertibili e  $P_i^{-1}AP_i = D_i$ , con

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad \spadesuit$$

## 20.2 Diagonalizzazione di matrici simmetriche

Come visto nel paragrafo precedente, il fatto che una matrice sia diagonalizzabile o meno non può essere, in generale, stabilito a priori, ma solo dopo lo studio dei suoi autospazi. Esiste però una classe di matrici la cui diagonalizzabilità è assicurata da un risultato generale di cui omettiamo la dimostrazione e su cui torneremo nelle prossime lezioni.

**Proposizione 20.10.** *Sia  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  una matrice simmetrica. Allora  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ .*

Per le matrici simmetriche a coefficienti reali è, dunque, assicurata la diagonalizzabilità su  $\mathbb{R}$ , cioè l'esistenza di una matrice invertibile  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  tale che  $P^{-1}AP = D \in \mathbb{R}^{n,n}$  sia diagonale.

**Esempio 20.11.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risulta

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{vmatrix} = -t^3 + 3t + 2 = -(t+1)^2(t-2) :$$

concludiamo che gli autovalori di  $A$  sono  $-1$  e  $2$ . Inoltre per la Proposizione 20.10 sappiamo che  $m_a(-1, A) = m_g(-1, A) = 2$  e  $m_a(2, A) = m_g(2, A) = 1$ .

Per determinare l'autospazio  $E_A(-1)$  risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ottenendo  $E_A(-1) = \mathcal{L}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ . Similmente, per determinare  $E_A(2)$  risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi  $E_A(2) = \mathcal{L}((1, 1, 1))$ . Posto

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

risulta

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Osservazione 20.12.** Per renderci conto dell'importanza della Proposizione 20.10 osserviamo che, spesso, è assai difficile determinare esattamente gli autovalori di una matrice: può però essere utile poterne determinare la diagonalizzabilità. Per esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/11 & -3/2 & \pi & \sqrt{21} \\ -3/2 & 0 & 1117 & -7^{3/4} \\ \pi & 1117 & -31 & e \\ \sqrt{21} & -7^{3/4} & e & 1 \end{pmatrix}$$

è senza dubbio diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$  perché simmetrica a coefficienti reali.

## 20.3 Il teorema di Cayley–Hamilton

Siano  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ed  $A \in K^{n,n}$  una matrice; poiché  $\dim_K(K^{n,n}) = n^2$ , le  $n^2 + 1$  matrici

$$I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2-1}, A^{n^2}$$

sono necessariamente linearmente dipendenti, che significa che esistono altrettanti scalari  $\alpha_{n^2}, \alpha_{n^2-1}, \alpha_{n^2-2}, \dots, \alpha_1, \alpha_0 \in K$  tali che

$$\alpha_0 A^{n^2} + \alpha_1 A^{n^2-1} + \dots + \alpha_{n^2-2} A^2 + \alpha_{n^2-1} A + \alpha_{n^2} I_n = 0_{n,n}.$$

Si consideri il polinomio

$$p(t) = \alpha_0 t^{n^2} + \alpha_1 t^{n^2-1} + \dots + \alpha_{n^2-2} t^2 + \alpha_{n^2-1} t + \alpha_{n^2} \in K[t]:$$

quanto osservato sopra viene spesso riassunto affermando che  $A$  è radice di  $p(t)$  o, anche, che  $p(A) = 0_{n,n}$ .

Poiché le matrici  $A, A^2, \dots, A^{n-1}, A^n$  non sono arbitrarie, ma sono potenze di una stessa matrice, è lecito domandarsi se non esista un polinomio di grado più basso di cui  $A$  sia radice: a questa domanda risponde il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione.

**Proposizione 20.13 (Teorema di Cayley–Hamilton).** *Siano  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  e  $A \in K^{n,n}$ . Allora  $A$  è radice di  $p_A(t)$ .*

Ciò significa che se il polinomio caratteristico di  $A$  è

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \dots + a_{n-1} t + a_n,$$

allora vale

$$p_A(A) = (-1)^n A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} A + a_n I_n = 0_{n,n}. \quad (20.3.1)$$

Tale osservazione permette di introdurre un nuovo metodo di inversione di matrici. Infatti  $A$  è invertibile se e solo se  $a_n = \det(A) \neq 0$ , dunque dall'equazione (20.3.1) otteniamo

$$\frac{1}{a_n} \left( (-1)^{n-1} A^{n-1} - a_1 A^{n-2} - a_2 A^{n-3} + \dots - a_{n-1} I_n \right) A = I_n,$$

cioè

$$A^{-1} = \frac{1}{a_n} \left( (-1)^{n-1} A^{n-1} - a_1 A^{n-2} - a_2 A^{n-3} + \dots - a_{n-1} I_n \right). \quad (20.3.2)$$

**Esempio 20.14.** Si consideri la generica matrice  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Allora  $p_A(t) = t^2 - (a+d)t + ad - bc$ , dunque se  $ad - bc \neq 0$ , segue dalla formula (20.3.2) che

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} (-A + (a+d)I_2) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad \spadesuit$$

**Esempio 20.15.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo visto che  $p_A(t) = -(t-3)(t+3)^2 = -t^3 - 3t^2 + 9t + 27$  nell'Esempio 19.9, quindi  $A$  ha autovalori  $\pm 3$  con  $m_a(3, A) = 1$  e  $m_a(-3, A) = 2$ , in particolare  $\det(A) = 3(-3)^2 = 27$ , sicché  $A$  è invertibile: inoltre abbiamo anche visto che  $A$  è diagonalizzabile, e nell'Esempio 20.9 abbiamo trovato  $P \in \mathbb{R}^{3,3}$  invertibile tale che

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

quindi  $A = PDP^{-1}$  da cui si ottiene

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = P(9I_3)P^{-1} = 9PP^{-1} = 9I_3,$$

perciò

$$A^{-1} = -\frac{1}{27}(A^2 - 3A - 9I_3) = \frac{1}{9}A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad \spadesuit$$

Un'altra interessante conseguenza del Teorema di Cayley-Hamilton riguarda le matrici nilpotenti; ricordiamo dal paragrafo 2.3 che una matrice  $A \in K^{n,n}$  si dice *nilpotente* se  $A^N = 0_{n,n}$  per qualche intero positivo  $N$ .

**Corollario 20.16.** *Sia  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Una matrice  $A \in K^{n,n}$  è nilpotente se e solo se ha 0 come unico autovalore e  $m_a(0, A) = n$ .*

*Dimostrazione.*  $A \in K^{n,n}$  ha 0 come unico autovalore e  $m_a(0, A) = n$  se e solo se  $t^n$  divide il polinomio caratteristico  $p_A(t)$  di  $A$  cioè se e solo se  $p_A(t) = (-1)^n t^n$ .

Supponiamo intanto che  $p_A(t) = (-1)^n t^n$ : dalla Proposizione 20.13 segue allora che  $0_{n,n} = p_A(A) = (-1)^n A^n$ , cioè  $A$  è nilpotente.

Viceversa, supponiamo che esista un intero positivo  $N$  tale che  $A^N = 0_{n,n}$ . Questa è un'uguaglianza su  $K \subseteq \mathbb{C}$ . Se  $\lambda \in \mathbb{C}$  è una qualsiasi radice di  $p_A(t)$ , allora  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  vista come matrice ad entrate complesse, dunque esiste  $X \in \mathbb{C}^{n,1} \setminus \{0_{n,1}\}$  tale che  $AX = \lambda X$ . Moltiplicando ambo i membri di tale identità per  $A^{N-1}$  otteniamo allora che  $0_{n,n} = A^N X = \lambda^N X$  da cui segue che  $\lambda = 0$  è l'unica radice in  $\mathbb{C}$  di  $p_A(t)$ , necessariamente con molteplicità  $n$ .  $\square$

**Esempio 20.17.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -8 \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} -2-t & -5 & -8 \\ 1 & 4-t & 7 \\ 0 & -1 & -2-t \end{vmatrix} = -t^3,$$

quindi  $A^3 = 0_{3,3}$ , cioè  $A$  è nilpotente.  $\spadesuit$