

Nel secondo caso si può procedere analogamente. Infatti anche v_1, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti. Si consideri la relazione $xv_1 + yv_3 + zv_4 = 0$ cioè, per esteso

$$x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1) + z(5, 1, 4) = 0.$$

Lavorando sulle componenti si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + 5z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

Dalla prima e dalla seconda equazione $x = -5z$, $y = -z$: sostituendo nella terza si verifica $x = y = z = 0$.

Invece nel terzo caso un calcolo diretto mostra che $2v_1 + v_2 = v_4$, dunque $\mathcal{L}(v_4) \subseteq \mathcal{L}(v_1, v_2)$, quindi $\mathcal{L}(v_4) + \mathcal{L}(v_1, v_2) = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_4) = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ che quindi, avendo dimensione 2 non può coincidere con \mathbb{R}^3 .

Esercizio 4. In \mathbb{R}^4 si considerino i vettori

$$v_1 := (1, 0, 1, 0), \quad v_2 := (2, h, 2, h), \quad v_3 := (1, 1 + h, 1, 2h),$$

e sia $W := \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$.

(1) Determinare $\dim(W)$ ed una base di W al variare di h .

(2) Scelto un valore di h per cui v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, determinare $v_4 \in \mathbb{R}^4$ in modo tale che (v_1, v_2, v_3, v_4) sia base.

Svolgimento. Per calcolare $\dim(W)$ si deve studiare la lineare indipendenza dei tre vettori v_1, v_2, v_3 . Per fare ciò procediamo in due modi diversi. Il primo, più rudimentale, consiste nel risolvere il sistema ottenuto eguagliando a zero le componenti della combinazione lineare $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$, cioè

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ hy + (1 + h)z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ hy + 2hz = 0. \end{cases}$$

Si vede subito che prima e terza equazione sono uguali, quindi possiamo ridurci al sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ hy + (1 + h)z = 0 \\ hy + 2hz = 0. \end{cases}$$

Se $h \neq 0$, dalla terza equazione $y = -2z$: sostituendo nella seconda $(1 - h)z = 0$ dunque, se $h \neq 1$, risulta $z = 0$ che implica $x = y = z = 0$. Concludiamo che se $h \neq 0, 1$, i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Se $h = 0$ si ha $v_1 := (1, 0, 1, 0)$, $v_2 := (2, 0, 2, 0)$, $v_3 := (1, 1, 1, 0)$, sicchè $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathcal{L}(v_1, v_3)$.

Infine se $h = 1$ si ha $v_1 := (1, 0, 1, 0)$, $v_2 := (2, 1, 2, 1)$, $v_3 := (1, 2, 1, 2)$, sicchè ancora $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathcal{L}(v_1, v_3)$.

In particolare si ricava che:

- i) se $h \neq 0, 1$, (v_1, v_2, v_3) è base di W , quindi $\dim(W) = 3$;
- ii) se $h = 0, 1$, v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti ma v_1, v_3 sono linearmente indipendenti, quindi (v_1, v_3) è base di W e $\dim(W) = 2$.