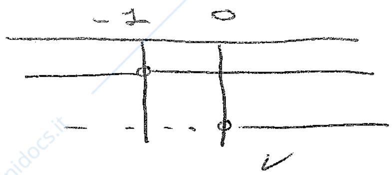
Esercizi assegnati il 31 ottobre 2019

1) Dati i due insiemi $A = \{x : x \in \mathbb{R} \;\; \frac{x^2+2x+1}{3x} > 0\}$ e $B = \{x : x \in \mathbb{R} \;\; x^2 - 9 > 0\}$, determinare:

$A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^c, B^c.

$$\frac{x^2+2x+1}{3x} > 0$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 > 0 \\ 3x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq -1 \\ x > 0 \end{cases}$$



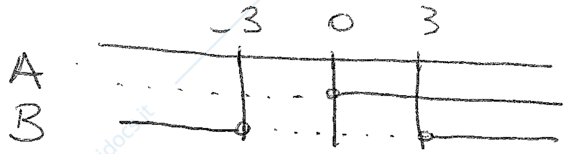
$A = \{x : x \in \mathbb{R} \;\; x > 0\}$

$x^2 - 9 > 0$

$(x+3)(x-3) > 0$

$x < -3 \vee x > 3$

$B = \{x : x \in \mathbb{R} \;\; x < -3 \vee x > 3\}$



$A \cap B = \{x : x \in \mathbb{R} \;\; x > 3\}$

$A \cup B = \{x : x \in \mathbb{R} \;\; x < -3 \vee x > 0\}$

$A \setminus B = \{x : x \in \mathbb{R} \;\; 0 < x \leq 3\}$

$B \setminus A = \{x : x \in \mathbb{R} \;\; x < -3\}$

$A^c = \{x : x \in \mathbb{R} \;\; x \leq 0\}$

$B^c = \{x : x \in \mathbb{R} \;\; -3 \leq x \leq 3\}$

2) Sia $A = \{0,1,2,3\}$ e sia $R \subseteq A \times A$: $R = \{(0,1), (2,3)\}$.
Studiare le proprietà che R soddisfa.

a) R non è riflessiva $\Rightarrow \neg(\forall x \in A \quad (x,x) \in R)$

b) R è antiriflessiva $\Rightarrow \forall x \in A \quad (x,x) \notin R$.

c) R non è simmetrica $\Rightarrow \exists x, y \in A : (x,y) \in A \wedge (y,x) \notin A$
$(x=0, \; y=1)$.

d) R è antisimmetrica $\Rightarrow \forall x, y \in A \quad (x,y) \in R \rightarrow (y,x) \notin R$.

e) R è transitiva $\Rightarrow \neg\exists x, y, z : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R$,
quindi, fallendo la premessa, l'implicazione vale sempre.

f) R non è totale $\Rightarrow \exists x, y : \quad (x,y) \notin R \wedge (y,x) \notin R$
$(x=0, \; y=2)$

Si conclude perciò che R è una relazione di ordine parziale su A.

3) Dimostrare con le tavole di verità che
$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ è una tautologia:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

4) Dimostrare con le tavole di appartenenza che:
$(A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$

A	B	C	$A \cup B$	$(A \cup B) \cap C$	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0

$\subseteq$