

Lezione 13

13.1 Spazi vettoriali

Il lettore attento avrà notato le somiglianze tra le operazioni di somma e prodotto per scalare per matrici e le loro proprietà (paragrafo 1.3), e le equivalenti operazioni e proprietà per vettori applicati (paragrafo 7.4); il motivo è che sia l'insieme $K^{m,n}$ delle matrici $m \times n$ a coefficienti in $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, sia gli insiemi $V_2(O)$ e $V_3(O)$ dei vettori geometrici applicati del piano e dello spazio, sono esempi di un concetto più generale: quello di *spazio vettoriale*.

Definizione 13.1 (Spazi vettoriali). Uno *spazio vettoriale su un campo* $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ è un insieme non vuoto V munito di due applicazioni

$$\begin{aligned} s_V: V \times V &\longrightarrow V \\ (v_1, v_2) &\longrightarrow v_1 + v_2 = s_V(v_1, v_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_V: K \times V &\longrightarrow V \\ (\alpha, v) &\longrightarrow \alpha v = p_V(\alpha, v), \end{aligned}$$

dette rispettivamente *somma* e *prodotto*, per cui valgono i seguenti assiomi:

- (S1) per ogni $v_1, v_2 \in V$, si ha $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ (*la somma è commutativa*);
- (S2) per ogni $v_1, v_2, v_3 \in V$, si ha $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ (*la somma è associativa*);
- (S3) esiste un elemento neutro per la somma, cioè un elemento $0_V \in V$ tale che $0_V + v = v$, per ogni $v \in V$;
- (S4) per ogni $v \in V$ esiste un elemento opposto di v , cioè $w \in V$ tale che $v + w = 0_V$;
- (P1) per ogni $v \in V$, si ha $1v = v$;
- (P2) per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ e $v \in V$, si ha $\alpha_1(\alpha_2 v) = (\alpha_1 \alpha_2)v$;
- (SP1) per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ e $v \in V$, si ha $(\alpha_1 + \alpha_2)v = \alpha_1 v + \alpha_2 v$;
- (SP2) per ogni $\alpha \in K$ e $v_1, v_2 \in V$, si ha $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$.

Gli elementi di V vengono detti *vettori*, quelli di K *scalari*.

Osservazione 13.2. In uno spazio vettoriale V su K l'elemento neutro rispetto alla somma è unico. Infatti se $0'_V$ fosse un altro elemento neutro, dall'assioma (S3) seguirebbero le due relazioni

$$0_V + 0'_V = 0'_V, \quad 0'_V + 0_V = 0_V;$$

poiché la somma è commutativa per l'assioma (S1), segue che $0'_V = 0_V$.

Similmente, l'elemento opposto w indicato nell'assioma (S4) è unico e coincide con $(-1)v$: infatti dalla relazione $0 = 1 + (-1)v$ abbiamo che

$$0_V = 0v = (1 + (-1))v = v + (-1)v,$$

cioè $(-1)v$ è un opposto di v . Se w fosse un altro elemento con la stessa proprietà, da (S4) seguirebbe $v + w = 0_V = v + (-1)v$ e dunque

$$w = w + 0_V = w + (v + (-1)v) = (w + v) + (-1)v = 0_V + (-1)v = (-1)v.$$

D'ora innanzi indicheremo l'unico opposto di $v \in V$ con il simbolo $-v$.

È facile dimostrare che in uno spazio vettoriale vale la legge di annullamento del prodotto, come spiegato nel seguente risultato.

Proposizione 13.3 (Legge di annullamento del prodotto per scalare). *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e siano $\alpha \in K$, $v \in V$. Allora $\alpha v = 0_V$ se e solo se è soddisfatta almeno una delle condizioni $\alpha = 0$, $v = 0_V$.*

Dimostrazione. Se $\alpha = 0$ allora $0 + 0 = 0$: moltiplicando ambo i membri per v e sfruttando la proprietà (SP2) si ha $0v + 0v = 0v$. Sia $w \in V$ tale che $0v + w = 0_V$ (ne esiste almeno uno da (S4)). Allora

$$0v = 0v + (0v + w) = (0v + 0v) + w = 0v + w = 0_V.$$

Per dimostrare $\alpha 0_V = 0_V$ si procede nello stesso modo. Viceversa, supponiamo $\alpha v = 0_V$. Se $\alpha \neq 0$ allora

$$v = 1v = (\alpha^{-1}\alpha)v = \alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1}0_V = 0_V,$$

che conclude la dimostrazione. \square

⚠ Della definizione di spazio vettoriale sono parte integrante sia le due operazioni di somma e prodotto, sia il campo di definizione, ovvero l'insieme degli scalari. Ad uno stesso insieme possiamo dare strutture di spazio vettoriale modificando una o entrambe le operazioni, o modificando il campo degli scalari. Per esempio osserviamo che \mathbb{R} è spazio vettoriale su \mathbb{R} con le operazioni di somma e prodotto che in esso sono definite. In modo simile \mathbb{C} è uno spazio vettoriale su \mathbb{C} . Notiamo però che se ci restringiamo a considerare solo il prodotto di numeri complessi per numeri reali, \mathbb{C} viene ad essere uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

Procediamo ora a dare alcuni esempi di spazi vettoriali.

Esempio 13.4. Si consideri l'insieme $K^{m,n}$ delle matrici $m \times n$ a coefficienti in $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Nella Lezione 1 abbiamo definito delle operazioni di somma e prodotto per uno scalare in tale insieme: precisamente se $\alpha \in K$ e

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}},$$

abbiamo posto

$$(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} + (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}},$$

$$\alpha (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = (\alpha a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Nelle Proposizioni 1.20 e 1.23 abbiamo mostrato che esse soddisfano tutti gli otto assiomi della Definizione 13.1, dunque $K^{m,n}$ con tali operazioni è uno spazio vettoriale su K . ♠

Esempio 13.5. Consideriamo l'insieme $V_2(O)$ dei vettori geometrici nel piano. Nella Lezione 7 abbiamo definito per via geometrica la somma (con la regola del parallelogramma) ed il prodotto per uno scalare reale. Poi nella Proposizione 7.11 abbiamo visto che tali operazioni soddisfano tutti gli otto assiomi della Definizione 13.1, dunque $V_2(O)$ con tali operazioni è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

La stessa cosa vale per i vettori geometrici nello spazio, $V_3(O)$, e le operazioni di somma e prodotto su di essi definiti in precedenza. ♠

Esempio 13.6. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non vuoto e consideriamo l'insieme \mathbb{R}^I delle funzioni a valori reali $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Osserviamo subito che $\mathbb{R}^I \neq \emptyset$: infatti la funzione costantemente nulla $0_I: I \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $0_I(x) = 0$ per ogni $x \in I$ vi appartiene.

Introduciamo delle operazioni di somma e prodotto come segue. Se $f, g \in \mathbb{R}^I$, poniamo $f + g: I \rightarrow \mathbb{R}$ come la funzione che per $x \in I$ vale $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Se $f \in \mathbb{R}^I$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$, poniamo $\alpha f: I \rightarrow \mathbb{R}$ come la funzione che vale $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ per $x \in I$.

Per verificare che con queste operazioni \mathbb{R}^I è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} bisogna verificare che esse soddisfano gli assiomi della Definizione 13.1. Cominciamo con l'assioma (S1): date $f, g \in \mathbb{R}^I$, poiché per ogni $x \in I$ i numeri reali $f(x) + g(x)$ e $g(x) + f(x)$ coincidono, segue, per definizione, che $f + g = g + f$.

Coloro i quali, in modo analogo, verificheranno gli altri assiomi della Definizione 13.1, si renderanno conto che tutto dipende dal fatto che il codominio delle funzioni considerate è esso stesso uno spazio vettoriale. Più in generale è vero che se X è un insieme e V è uno spazio vettoriale su K , allora l'insieme V^X delle funzioni $f: X \rightarrow V$ a valori in V , dotato delle operazioni naturali di somma di funzioni e prodotto di una funzione per scalare è, a sua volta, uno spazio vettoriale su K . ♠

Esempio 13.7. Indichiamo con K^n l'insieme delle n -uple ordinate di elementi di un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$: un elemento di K^n è quindi una sequenza (x_1, x_2, \dots, x_n) di n elementi $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$. Possiamo definire due operazioni di somma e prodotto:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

per ogni scelta di $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in K^n$ ed $\alpha \in K$.

Osserviamo che gli elementi di K^n si possono identificare naturalmente con le matrici in $K^{n,1}$ e, in tale identificazione, le operazioni introdotte in K^n vengono a corrispondere con le operazioni di somma di matrici e di prodotto di una matrice per uno scalare definite in $K^{n,1}$. Segue che K^n è uno spazio vettoriale.

Per questo motivo d'ora innanzi non distingueremo più tra K^n e $K^{n,1}$; quindi scriveremo (x_1, \dots, x_n) per indicare la matrice colonna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

In particolare K^1 è identificato con $K^{1,1} = K$. ♠

13.2 Sottospazi vettoriali

Definizione 13.8 (Sottospazi vettoriali). Sia V uno spazio vettoriale su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e sia $W \subseteq V$ un suo sottoinsieme non vuoto.

L'insieme W si dice *sottospazio vettoriale* di V se esso, munito delle due applicazioni ristrette $(s_V)_{|W \times W}$ e $(p_V)_{|K \times W}$, è uno spazio vettoriale su K .

Analizziamo la definizione di sottospazio: una prima osservazione è che deve valere $W \neq \emptyset$. Inoltre vogliamo che le applicazioni $(s_V)_{|W \times W}$ e $(p_V)_{|K \times W}$ rendano W uno spazio vettoriale su k . Poiché, a priori, si ha che

$$(s_V)_{|W \times W}: W \times W \longrightarrow V, \quad (p_V)_{|K \times W}: k \times W \longrightarrow V,$$

ciò significa che tali applicazioni devono avere di fatto immagine contenuta in W , ovvero la somma di due elementi di W deve essere ancora un elemento di W (un sottoinsieme con tale proprietà si dice *chiuso rispetto alla somma*) e il prodotto di uno scalare per un elemento di W deve essere anch'esso un elemento di W (un sottoinsieme con tale proprietà si dice *chiuso rispetto al prodotto per scalari*).

Supponiamo che ciò accada. Poiché gli assiomi (S1), (S2), (P1), (P2), (SP1), (SP2) della Definizione 13.1 valgono per ogni scelta dei vettori $v, v_1, v_2, v_3 \in V$ e degli scalari $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in K$, necessariamente esse valgono anche se ci restringiamo ai soli elementi in W .

Rimangono da verificare gli assiomi (S3) ed (S4). Per verificare (S3) si osservi che W è non vuoto, quindi contiene almeno un vettore w : poiché W è chiuso rispetto al prodotto per scalari si ha anche che $0_V = 0 w \in W$, quindi in W c'è un elemento neutro per la somma (lo stesso di V). Infine, per verificare (S4), si osservi che se $w \in W \subseteq V$, dall'Osservazione 13.2 segue $-w = (-1) w \in W$, ovvero se W contiene un elemento, allora contiene anche il suo opposto.

Le considerazioni appena fatte dimostrano il seguente criterio per verificare se un sottoinsieme è un sottospazio vettoriale o meno.

Proposizione 13.9. *Sia V uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e sia $W \subseteq V$ un suo sottoinsieme. W è sottospazio vettoriale di V se e solo se è non vuoto ed è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per scalari definiti in V .*

Se W è sottospazio di V allora, come visto sopra, $0_V \in W$ e W è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per scalari definiti in V . Viceversa se $0_V \in W$ e W è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per scalari definiti in V , allora W è sottospazio vettoriale di V per il precedente criterio. Questo dimostra il seguente criterio, simile al precedente.

Proposizione 13.10. *Sia V uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e sia $W \subseteq V$ un suo sottoinsieme. W è sottospazio vettoriale di V se e solo se $0_V \in W$ ed è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per scalari definiti in V .*

Diamo ora alcuni esempi di sottospazi, utilizzando i criteri enunciati sopra.

Esempio 13.11. In \mathbb{R}^2 si consideri l'insieme

$$W_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \}.$$

Gli elementi di W_1 sono tutte e sole le coppie (x, y) con $y = 0$ ed $x \in \mathbb{R}$. In particolare, se si identifica \mathbb{R}^2 con il piano ordinario con fissato un sistema di riferimento $O\vec{i}\vec{j}$, l'insieme W_1 rappresenta l'asse delle ascisse.

Si noti che $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in W_1$. Siano poi $(x', 0), (x'', 0) \in W_1$: allora

$$(x', 0) + (x'', 0) = (x' + x'', 0 + 0) = (x' + x'', 0) \in W_1.$$

Infine siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x, 0) \in W_1$: allora

$$\alpha(x, 0) = (\alpha x, \alpha 0) = (\alpha x, 0) \in W_1.$$

Concludiamo che W_1 è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .

Sempre in \mathbb{R}^2 si consideri ora l'insieme

$$W_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \}.$$

Gli elementi di W_2 sono tutte e sole le coppie del tipo $(x, -x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Se si identifica \mathbb{R}^2 con il piano ordinario con fissato un sistema di riferimento $O\vec{i}\vec{j}$, l'insieme W_2 rappresenta la bisettrice del secondo e quarto quadrante.

In particolare $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) = (0, -0) \in W_2$. Siano poi $(x', -x'), (x'', -x'') \in W_2$: allora $(x', -x') + (x'', -x'') = (x' + x'', -x' - x'') = (x' + x'', -(x' + x'')) \in W_2$. Infine siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x, -x) \in W_2$: allora $\alpha(x, -x) = (\alpha x, \alpha(-x)) = (\alpha x, -(\alpha x)) \in W_2$.

Concludiamo che W_2 è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .

Siano adesso $a, b \in \mathbb{R}$. In \mathbb{R}^2 si consideri l'insieme

$$W_{a,b} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0 \}.$$

Se si identifica \mathbb{R}^2 con il piano ordinario con fissato un sistema di riferimento $O\vec{i}\vec{j}$, l'insieme $W_{a,b}$ rappresenta o l'intero piano oppure una retta per l'origine.

Chiaramente $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$, dunque $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in W_{a,b}$. Siano poi $(x', y'), (x'', y'') \in W_{a,b}$: allora $ax' + by' = ax'' + by'' = 0$, dunque

$$a(x' + x'') + b(y' + y'') = ax' + ax'' + by' + by'' = (ax' + by') + (ax'' + by'') = 0 + 0 = 0,$$

cioè $(x', y') + (x'', y'') = (x' + x'', y' + y'')$ è un elemento di $W_{a,b}$.

Infine siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x, y) \in W_{a,b}$: allora $ax + by = 0$ e

$$a(\alpha x) + b(\alpha y) = \alpha ax + \alpha by = \alpha(ax + by) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

cioè $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ è anch'esso un elemento di $W_{a,b}$.

Concludiamo che $W_{a,b}$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 . Si noti che i sottospazi W_1 e W_2 sono casi particolari di questo esempio: precisamente W_1 si ottiene considerando $a = 1, b = 0$, W_2 considerando $a = b = 1$. ♠

Esempio 13.12. Sia $A \in K^{m,n}$ una matrice, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$; in $K^{n,p}$ si consideri l'insieme

$$W = \{ X \in K^{n,p} \mid AX = 0_{m,p} \}.$$

Chiaramente la matrice nulla $0_{n,p} \in K^{n,p}$ appartiene a W . Siano poi $X', X'' \in W$: ciò significa che $AX' = AX'' = 0_{m,p}$. Allora

$$A(X' + X'') = AX' + AX'' = 0_{m,p} + 0_{m,p} = 0_{m,p},$$

cioè $X' + X'' \in W$. Siano infine $\alpha \in K$ ed $X \in W$: ciò significa che $AX = 0_{m,p}$. Allora

$$A(\alpha X) = \alpha AX = \alpha 0_{m,p} = 0_{m,p},$$

cioè $\alpha X \in W$. Concludiamo che W è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .

Si noti che il sottospazio $W_{a,b}$ dell'Esempio 13.11 (e quindi anche W_1 e W_2) è un caso particolare di questo esempio: infatti siamo nel caso $m = p = 1, n = 2, A = (a \ b)$.

Abbiamo quindi dimostrato che l'insieme delle soluzioni di una qualsiasi equazione matriciale omogenea è un sottospazio di $K^{n,p}$: vedremo più avanti che vale anche il viceversa, ovvero che ogni sottospazio di $K^{n,p}$ è insieme delle soluzioni di una qualche (sempre più d'una) equazione matriciale omogenea. ♠

Esempio 13.13. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non vuoto che, per comodità, supponiamo aperto, diciamo $I =]a, b[$. Nell'Esempio 13.6 abbiamo verificato che l'insieme \mathbb{R}^I delle funzioni $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale.

Si consideri adesso il sottoinsieme

$$\mathcal{C}^0(I) = \{ f \in \mathbb{R}^I \mid f \text{ continua in tutto } I \}.$$

Dal momento che la funzione identicamente nulla $0_I: I \rightarrow \mathbb{R}$ è continua (come tutte le funzioni costanti), $0_I \in \mathcal{C}^0(I)$. Inoltre se $f, g \in \mathcal{C}^0(I)$ la loro somma $f + g$ è ancora in $\mathcal{C}^0(I)$. Infine se $f \in \mathcal{C}^0(I)$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ allora anche αf è in $\mathcal{C}^0(I)$. Concludiamo che $\mathcal{C}^0(I)$ è un sottospazio di \mathbb{R}^I .

Più in generale, per ogni $p \geq 1$, consideriamo l'insieme

$$\mathcal{C}^p(I) = \{ f \in \mathbb{R}^I \mid f \text{ derivabile } p \text{ volte in tutto } I \text{ con } f^{(p)} \in \mathcal{C}^0(I) \}.$$

Da quanto visto nel corso di Analisi Matematica I segue che $\mathcal{C}^p(I)$ è sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^I per ogni p . Si noti che $\mathcal{C}^p(I)$ è sottospazio vettoriale di ogni $\mathcal{C}^q(I)$ con $0 \leq q \leq p$. ♠

Esempio 13.14. Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto non vuoto, $x_0 \in I$ e $g \in \mathbb{R}^I$ non nulla in $I \setminus \{x_0\}$. Si consideri il sottoinsieme

$$\mathcal{F}_{x_0, g} = \left\{ f \in \mathbb{R}^I \mid \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il lettore dimostri che $\mathcal{F}_{x_0, g}$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^I con le solite operazioni di somma tra funzioni e prodotto per uno scalare. ♠

Diamo ora alcuni esempi di insiemi che non sono sottospazi: in particolare mostreremo che possono valere due delle tre proprietà, senza che necessariamente debba valere anche la terza.

Esempio 13.15. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$. In \mathbb{R}^2 si consideri l'insieme

$$W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c \}.$$

Se si identifica \mathbb{R}^2 con il piano ordinario con fissato un sistema di riferimento $O\vec{i}, \vec{j}$, l'insieme W o è vuoto oppure rappresenta una retta non passante per l'origine.

Chiaramente $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = c \neq 0$, dunque $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \notin W$: in particolare W non è un sottospazio di \mathbb{R}^2 in forza della Proposizione 13.10.

Più in generale se $A \in K^{m, n}$ e $B \in K^{m, p} \setminus \{0_{m, p}\}$, allora l'insieme

$$W = \{ X \in K^{n, p} \mid AX = B \}$$

non può essere sottospazio vettoriale di $K^{n, p}$ perché non contiene mai $0_{n, p}$.

Ricordiamo però che se l'equazione matriciale $AX = B$ ha almeno una soluzione X_0 , allora l'insieme delle sue soluzioni è

$$\{ X_0 + Y \mid AY = 0_{m, p} \}.$$

Quindi, pur non essendo W un sottospazio, può essere ottenuto "traslando" un sottospazio (l'insieme delle soluzioni dell'equazione matriciale omogenea associata) di una stessa soluzione fissata X_0 . ♠

Esempio 13.16. In \mathbb{R}^2 si consideri l'insieme

$$W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \}.$$

Gli elementi di W sono tutte e sole le coppie aventi almeno una componente nulla. Se si identifica \mathbb{R}^2 con il piano ordinario con fissato un sistema di riferimento $O\vec{i}, \vec{j}$, l'insieme W rappresenta l'unione degli assi coordinati.

Chiaramente $00 = 0$, dunque $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in W$. Siano quindi $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x, y) \in W$: allora $xy = 0$, dunque

$$(\alpha x)(\alpha y) = \alpha^2 xy = \alpha^2 0 = 0,$$

cioè $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ è anch'esso un elemento di W . Nonostante ciò, W non è un sottospazio perché non è chiuso rispetto alla somma. Infatti $(1, 0)$ e $(0, 1) \in W$, ma $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \notin W$. ♠

Esempio 13.17. In \mathbb{R}^2 si consideri l'insieme

$$W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \}.$$

Gli elementi di W sono tutte e sole le coppie aventi entrambe le componenti non negative. Se si identifica \mathbb{R}^2 con il piano ordinario con fissato un sistema di riferimento $O\vec{i}\vec{j}$, allora l'insieme W rappresenta il primo quadrante.

Chiaramente $0 \geq 0$, dunque $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in W$. Siano poi $(x', y'), (x'', y'') \in W$: allora $x', y', x'', y'' \geq 0$, dunque $x' + x'', y' + y'' \geq 0$, cioè $(x', y') + (x'', y'') = (x' + x'', y' + y'')$ è un elemento di W .

Nonostante ciò, W non è un sottospazio perché non è chiuso rispetto al prodotto per scalari: infatti $(1, 1) \in W$, ma $-1(1, 1) = (-1, -1) \notin W$. ♠

Osservazione 13.18. Se V è uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ allora esso contiene come sottoinsiemi sia se stesso sia $\{0_V\}$. Chiaramente entrambi questi sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali di V . Tali sottospazi, che ci sono sempre, vengono detti *sottospazi banali di V* .

13.3 Alcune operazioni notevoli fra sottospazi

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e siano W' e W'' due suoi sottospazi. Ci domandiamo se, tramite le operazioni insiemistiche usuali (differenza, intersezione, unione), si ottengono ancora sottospazi.

Una prima osservazione più o meno banale è che la differenza $W' \setminus W''$ non è mai un sottospazio. Infatti $0_V \in W', W''$ dunque $0_V \notin W' \setminus W''$.

Il caso dell'intersezione $W' \cap W''$ è, invece, diverso.

Proposizione 13.19. *Sia V uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e siano W', W'' sottospazi vettoriali di V . Allora l'intersezione $W' \cap W''$ è un sottospazio vettoriale di V .*

Dimostrazione. Poiché $0_V \in W', W''$ si ha $0_V \in W' \cap W''$.

Siano ora $w_1, w_2 \in W' \cap W''$: ciò significa che $w_1, w_2 \in W'$, dunque $w_1 + w_2 \in W'$ (perché W' è un sottospazio), e $w_1, w_2 \in W''$, dunque $w_1 + w_2 \in W''$ (perché anche W'' è un sottospazio), sicché $w_1 + w_2 \in W' \cap W''$ ovvero $W' \cap W''$ è chiuso rispetto alla somma.

Siano infine $\alpha \in K$ e $w \in W' \cap W''$: ciò significa che $w \in W'$, dunque $\alpha w \in W'$ (perché W' è un sottospazio), e $w \in W''$, dunque $\alpha w \in W''$ (perché anche W'' è un sottospazio), sicché $\alpha w \in W' \cap W''$ ovvero $W' \cap W''$ è chiuso rispetto al prodotto per scalari.

Concludiamo che $W' \cap W''$ è un sottospazio vettoriale di V in virtù della Proposizione 13.10. □

Esempio 13.20. Siano $a', b', c', a'', b'', c'' \in \mathbb{R}$. In \mathbb{R}^3 siano dati i sottoinsiemi

$$W' = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a'x + b'y + c'z = 0 \},$$

$$W'' = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a''x + b''y + c''z = 0 \}.$$

Il lettore verifichi per esercizio che W' e W'' sono sottospazi.

L'intersezione $W' \cap W''$ è l'insieme delle terne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che appartengono sia a W' che a W'' , quindi delle terne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che soddisfano simultaneamente le equazioni $a'x + b'y + c'z = a''x + b''y + c''z = 0$, ovvero $W' \cap W''$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} a'x + b'y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + c''z = 0. \end{cases}$$

Si noti che tale insieme è un sottospazio di \mathbb{R}^3 sia per la Proposizione 13.19, perché è intersezione di sottospazi, sia dall'Esempio 13.12. ♠

La Proposizione 13.19 vale per l'intersezione di un numero qualsiasi (anche infinito) di sottospazi, come spiegato di seguito.

Proposizione 13.21. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e siano W_j sottospazi vettoriali di V per $j \in J$, opportuno insieme di indici. Allora l'intersezione $\bigcap_{j \in J} W_j$ è un sottospazio vettoriale di V .*

Esempio 13.22. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non vuoto, che per comodità supponiamo aperto, diciamo $I =]a, b[$. Nell'Esempio 13.13 abbiamo dimostrato che l'insieme $\mathcal{C}^p(I)$ delle funzioni $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili fino all'ordine p con derivata p -esima continua è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^I (o $\mathcal{C}^0(I)$). Definiamo

$$\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{p \geq 0} \mathcal{C}^p(I).$$

Per quanto detto sopra $\mathcal{C}^\infty(I)$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^I (o di $\mathcal{C}^p(I)$ per $p \geq 0$). I suoi elementi sono le funzioni definite su I aventi derivate di ogni ordine. ♠

Passiamo ora ad esaminare il caso dell'unione.

Proposizione 13.23. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e siano $W', W'' \subseteq V$ sottospazi vettoriali di V . Allora l'unione $W' \cup W''$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo se o $W' \subseteq W''$, ed in tal caso $W' \cup W'' = W''$, oppure $W'' \subseteq W'$, ed in tal caso $W' \cup W'' = W'$.*

Dimostrazione. È chiaro che se $W' \subseteq W''$ allora $W' \cup W'' = W''$, mentre se $W'' \subseteq W'$ allora $W' \cup W'' = W'$, dunque $W' \cup W''$ è banalmente un sottospazio in questi due casi.

Viceversa supponiamo che $W' \not\subseteq W''$ e $W'' \not\subseteq W'$. Allora esistono $w' \in W' \setminus W''$ e $w'' \in W'' \setminus W'$. Si consideri $w = w' + w''$: se fosse $w \in W' \cup W''$ allora o $w \in W'$ o $w \in W''$. Nel primo caso si dovrebbe avere $w'' = w - w' \in W'$, nel secondo $w' = w - w'' \in W''$, in contrasto con la scelta fatta. Concludiamo che $w \notin W' \cup W''$. □

In sostanza l'unione non è "quasi mai" un sottospazio. Dal momento che l'unione di due insiemi $X', X'' \subseteq X$ può essere definita come il più piccolo sottoinsieme di X contenente sia X' che X'' , possiamo definire per analogia una nuova operazione tra sottospazi vettoriali che generalizza l'unione.

Definizione 13.24 (Somma di sottoinsiemi). Sia V uno spazio vettoriale su un campo $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e siano $W', W'' \subseteq V$ sottoinsiemi non vuoti.

Definiamo *somma di W' e W''* l'insieme

$$W' + W'' = \{ v \in V \mid \exists w' \in W', w'' \in W'' : v = w' + w'' \}.$$

Osservazione 13.25. Se $0_V \in W''$ allora $w' + 0_V \in W' + W''$ per ogni $w' \in W'$, dunque $W' \subseteq W' + W''$. In particolare se $0_V \in W', W''$ (ed è questo il caso se sono entrambi sottospazi vettoriali), allora l'unione $W' \cup W'' \subseteq W' + W''$.

Esempio 13.26. Siano $A \in K^{m,n}$ e $B \in K^{m,p}$ matrici, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Supponiamo che l'equazione matriciale $AX = B$ abbia almeno una soluzione $X_0 \in K^{n,p}$; allora

$$\{ X \in K^{n,p} \mid AX = B \} = \{ X_0 \} + \{ X \in K^{n,p} \mid AX = 0_{m,p} \}.$$

Osserviamo che $0_{n,p} \in \{ X \in K^{n,p} \mid AX = 0_{m,p} \}$ e, infatti,

$$X_0 \in \{ X_0 \} + \{ X \in K^{n,p} \mid AX = 0_{m,p} \}.$$

Proposizione 13.27. Sia V uno spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e siano W', W'' sottospazi vettoriali di V . Allora la somma $W' + W''$ è un sottospazio vettoriale di V ; inoltre se $W \subseteq V$ è un qualsiasi sottospazio contenente W' e W'' , allora $W' + W'' \subseteq W$.

Dimostrazione. Poiché $0_V \in W', W''$ si ha $0_V + 0_V \in W' + W''$.

Siano ora $v_1, v_2 \in W' + W''$: ciò significa che esistono $w'_1, w'_2 \in W'$ e $w''_1, w''_2 \in W''$ tali che $v_1 = w'_1 + w''_1$ e $v_2 = w'_2 + w''_2$. Allora

$$v_1 + v_2 = (w'_1 + w''_1) + (w'_2 + w''_2) = w'_1 + w'_2 + w''_1 + w''_2 = (w'_1 + w'_2) + (w''_1 + w''_2) \in W' + W'',$$

ovvero $W' + W''$ è chiuso rispetto alla somma.

Siano $\alpha \in K$ e $v \in W' + W''$: ciò significa che esistono $w' \in W'$ e $w'' \in W''$ tali che $v = w' + w''$. Allora

$$\alpha v = \alpha(w' + w'') = \alpha w' + \alpha w'' = (\alpha w') + (\alpha w'') \in W' + W'',$$

ovvero $W' + W''$ è chiuso rispetto al prodotto per scalari.

Concludiamo che $W' + W''$ è un sottospazio vettoriale di V grazie alla Proposizione 13.10.

Infine sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale contenente W' e W'' : se $v \in W' + W''$ esistono $w' \in W' \subseteq W$ e $w'' \in W'' \subseteq W$ tali che $v = w' + w''$, sicché $v \in W$ (perché W è un sottospazio, quindi è chiuso rispetto alla somma), da cui si deduce che $W' + W'' \subseteq W$. \square

Molto spesso si riassume la Proposizione 13.27 dicendo che "se W' e W'' sono sottospazi vettoriali di V allora $W' + W''$ è il più piccolo sottospazio di V contenente $W' \cup W''$ (rispetto alla relazione di ordine parziale sull'insieme dei sottospazi di V dato dall'inclusione)".